XXX OLIMPIADA FIZYCZNA (1980/1981). Stopień I, zadanie teoretyczne – T4 [1]

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski; Andrzej Kotlicki: *Fizyka w Szkole*, nr 3, 1981 r.;
Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska: *Olimpiada Fizyczna XXIX – XXXI*. WSiP, Warszawa 1986, str. 102 – 106.

Nazwa zadania: Analiza ruchu z równi pochyłej kulki z tarciem tocznym

Działy: Mechanika, dynamika

Słowa kluczowe: siła, tarcie, toczne, posuwiste, poślizg, toczenie, współczynnik, nacisk, moment, bezwładności, prędkość, przyspieszenie, kąt, promień, kulka, równia, pochyła, obrót.

Zadanie 4 teoretyczne – T4, zawody I stopnia, XXX OF [1]

Na równi o kącie nachylenia α znajduje się kula o promieniu r. Współczynnik tarcia posuwistego kulki o równię wynosi f, natomiast współczynnik tarcia potoczystego jest równy k. Początkowo kulka jest nieruchoma – kulkę przytrzymujemy. Opisz ruch kulki po jej zwolnieniu w przypadku, gdy $k < fr$. Jak prędkość kątowa i liniowa kulki zależą od czasu? Przedyskutuj wyniki.

Rozwiązanie

Tarcie toczne jest odpowiedzialne za opory utrudniające toczenie walca lub kuli po płaszczyźnie. Współczynnik k tego tarcia określa się jako stosunek wartości momentu siły M do wartości siły N dociskającej walec lub kulę do płaszczyzny:

$$k = \frac{M}{N}.$$

Jak widać, współczynnik tarcia tocznego ma wymiar długości.

W przypadku kulki o masie m umieszczonej na równi o kącie nachylenia α (rys. 1 a) siła nacisku N ma wartość

$$N = mg\cos\alpha$$

(g – przyspieszenie ziemskie).

Moment tarcia tocznego (potoczystego) M, który działa na kulkę w kierunku przedstawionym strzałką na rys. 1b jest równy

$$M = kmg\cos\alpha. \tag{1}$$

Ponadto na kulkę działa siła tarcia posuwistego T, przyłożona do kulki w punkcie styku z równią i skierowana wzdłuż równi ku górze. Wartość tej siły wynosi

$$T = fmg\cos\alpha. \tag{2}$$

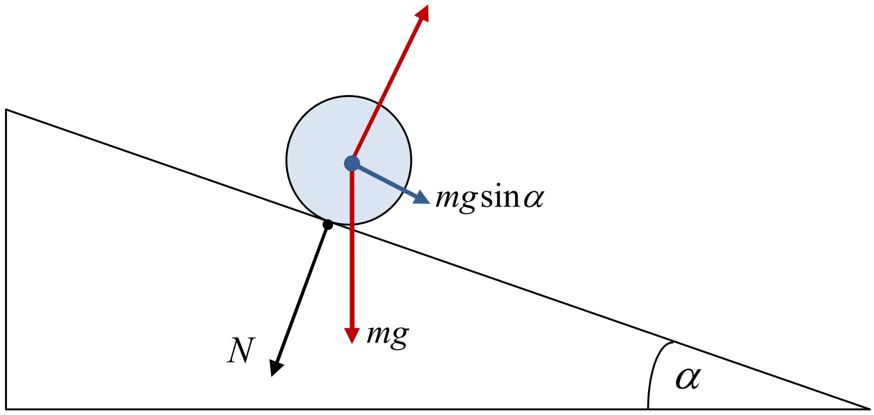
Równanie (1) dotyczy sytuacji, w której zachodzi staczanie się kulki, natomiast równanie (2) jest spełnione podczas poślizgu kulki.

[1] Porównaj zadania o podobnej tematyce z olimpiad: XX OF, st. II – zad. T1: *Ruch kulki na równi bez poślizgu*; XXI OF, st. I – zad. T3: *Prędkość kulki staczającej się z równi pochyłej*; XXII OF, st. II – zad. dośw.: *Wyznaczanie współczynnika tarcia kulki stalowej o szkło*; VI Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna – zad. T1: *Ruch walców staczających się z równi*; XXIV OF, st. II – zad. dośw. 2 (dodatkowe): *Wyznaczanie współczynnika tarcia posuwistego rurki o równię*; XXVII OF, st. I – zad. T1: *Ruch kulki z równi z uwzględnieniem tarcia potoczystego i posuwistego*; XXVII OF, st. III – zad. T2: *Opis ruchu kulki po poziomym stole z uwzględnieniem tarcia posuwistego i potoczystego*; XXXI OF; st. wstępny – zad. dośw. D1: *Wyznaczanie współczynnika statycznego tarcia potoczystego stali o szkło*.

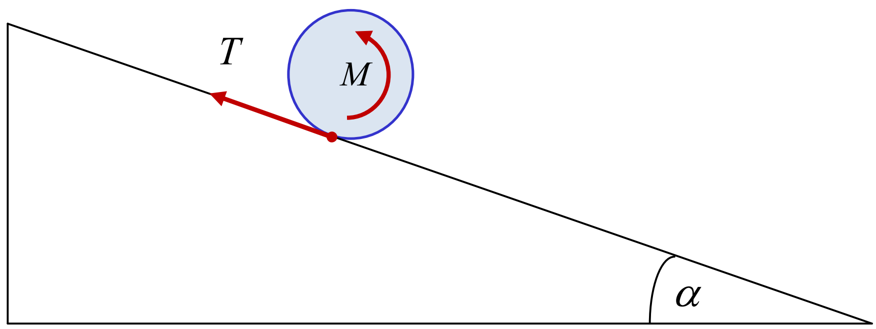
Podczas spoczynku wartości M i T są jedynie ograniczone od góry

$$M \le kmg\cos\alpha, \tag{3}$$

$$T \le f\,mg\cos\alpha. \tag{4}$$



Rys. 1 a. Zaznaczono dwie siły działające na kulkę znajdującą się na równi pochyłej, przyłożone do środka kulki: ciężar kulki o wartości mg i siła sprężystości równi prostopadła do podłoża równi skierowana do góry o wartości $mg\cos\alpha$ (tj. siła reakcji na siłę nacisku N kulki na podłoże o wartości $N = mg\cos\alpha$). Wypadkowa tych dwóch sił jest siłą zsuwającą równoległą do równi skierowaną w dół równi o wartości $mg\sin\alpha$. Trzecią siłą działającą na kulkę jest siła tarcia posuwistego T przyłożona do punktu styczności kulki z podłożem równi (rys. 1 b).



Rys. 1 b. Na kulkę działa siła tarcia posuwistego T przyłożona do punktu styczności kulki z podłożem równi i skierowana wzdłuż równi ku górze oraz moment tarcia tocznego przeciwny do obrotu toczącej się kulki – w kierunku przedstawionym strzałką (łuk) na rys.

Wzór (3) obowiązuje również podczas poślizgu bez toczenia, natomiast wzór (4) – podczas staczania się kulki bez poślizgu. Aby nie komplikować, przyjęto te same współczynniki k i f, co dla ruchu. W ogólności współczynniki tarcia mają różne wartości w spoczynku i w ruchu.

Rozważmy najpierw sytuację, kiedy kulka będzie pozostawała na równi w spoczynku pomimo zaprzestania działania sił przytrzymujących ja. Siła tarcia $\vec{T}$ w tej sytuacji równoważy równoległą do równi składową siły ciężkości kulki

$$T = mg\sin\alpha. \tag{5}$$

Ponieważ jednak punkty przyłożenia obu tych sił nie są identyczne – siła $\vec{T}$ przyłożona jest w punkcie styku kulki z podłożem, siła ciężkości zaś w środku kulki – wynikiem istnienia tych sił jest działający na kulkę moment siły równy $rmg\sin\alpha$ (ten moment siły można traktować na przykład jako moment siły ciężkości kulki względem punktu podparcia lub też jako moment siły tarcia względem środka kulki). Omawiany moment siły jest z kolei równoważony przez moment tarcia tocznego, a więc

$$M = rmg\sin\alpha. \tag{6}$$

Z porównania wzorów (3), (6) oraz (4) i (5)wynika, że

$$rmg\sin\alpha \le kmg\cos\alpha$$

$$mg\sin\alpha \le f\,mg\cos\alpha$$

a stąd warunki na pozostawanie kulki w spoczynku są następujące:

$$\mathrm{tg}\alpha \le k/r \tag{7}$$

oraz

$$\mathrm{tg}\alpha \le f. \tag{8}$$

Zgodnie z warunkami zadania $k/r < f$. Przy spełnieniu warunku (7) warunek (8) jest więc zawsze spełniony.

Warunkiem pozostawania kulki w spoczynku jest zatem nierówność (7), czyli kulka znajduje się w spoczynku dla kątów $\alpha \le \mathrm{arctg}(k/r)$.

Rozpatrzmy teraz kąty większe od $\mathrm{arctg}(k/r)$. Zapytamy najpierw, czy możliwe jest zsuwanie się kulki bez obrotu. Oznacza to różną od zera prędkość v środka kulki przy zerowej prędkości kątowej ω. Siła tarcia w tym przypadku jest określona wzorem (2). Moment tej siły względem środka kulki wynosi

$$M_T = rf\,mg\sin\alpha. \tag{9}$$

Aby kulka się nie obracała, moment ten musi być równoważony przez moment M tarcia tocznego.Maksymalną wartość M określa wzór (1). Porównując ten wzór ze wzorem (9) i uwzględniając podany w zadaniu warunek $fr > k$ stwierdzamy, że $M_T > M$. Wobec tego zsuwanie się kulki bez obrotu nie jest możliwe. Kulka uzyska więc przyspieszenie kątowe $\varepsilon \neq 0$, a zatem także prędkość kątową $\omega \neq 0$.

W sytuacji toczenia się kulki moment siły tarcia tocznego dany jest wzorem (1). Ułóżmy teraz równanie ruchu dla środka masy kulki

$$ma = mg\sin\alpha - T \tag{10}$$

oraz dla ruchu obrotowego kulki wokół osi przechodzącej przez jej środek (i równoległej do podstawy równi)

$$I\varepsilon = rT - M = rT - kmg\cos\alpha. \tag{11}$$

W ostatnim równaniu I oznacza moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez jej środek:

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \tag{12}$$

Rozwiązując układ równań (10) i (11) przy warunku $\varepsilon = a/r$, który wyraża brak poślizgu, otrzymujemy

$$a = g\frac{\sin\alpha - \frac{k}{r}\cos\alpha}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

a po uwzględnieniu wzoru (12)

$$a = \frac{5}{7} g\left(\sin\alpha - \frac{k}{r}\cos\alpha \right). \tag{13}$$

Przyspieszenie kątowe kulki jest oczywiście równe $\varepsilon = a/r$. Bez trudu znajdujemy też, korzystając z równania (10), wyrażenie na siłę tarcia posuwistego:

$$T = mg\frac{\frac{I}{mr^2}\sin\alpha + \frac{k}{r}\cos\alpha}{1 + \frac{I}{mr^2}} = \frac{5}{7} mg\cos\alpha\left(\frac{2}{5}\mathrm{tg}\alpha + \frac{k}{r} \right). \tag{14}$$

Przy założeniu, ze poślizg nie występuje, T spełnia nierówność (4). Po podstawieniu do tej nierówności wyrażenia (14) otrzymujemy warunek na kąt α:

$$\mathrm{tg}\alpha \le \frac{5}{2}\left(\frac{7}{5} f - \frac{k}{r} \right). \tag{15}$$

Rozwiązanie to obowiązuje dla kątów α takich, że

$$T \le fmg\cos\alpha\,,$$

czyli takich, że

$$\frac{5}{7}\left(\frac{2}{5}\mathrm{tg}\alpha + \frac{k}{r} \right) \le f.$$

Dla $\mathrm{tg}\alpha = k/r$ lewa strona przyjmuje wartość k/r, a więc jest mniejsza niż f.
Nierówność ta określa górny zakres kątów α, dla których możliwy jest ruch bez poślizgu. Poślizg oznaczałby, że siła T ma większą wartość niż wyliczona. Niech ta większa, największa możliwa siła wynosi $T_{\max}$. Warunek $r\omega = \upsilon$ nie byłby teraz spełniony. Zwiększenie T oznacza zwiększenie ω i zmniejszenie υ. Oznaczałoby to pojawienie się „ujemnego” poślizgu, co nie ma sensu. Toczenie się bez poślizgu jest w rozważanym zakresie jedyną możliwą formą toczenia się. Porównując ten wynik z warunkiem (7) widzimy, że nierówność (15) jest słabsza od nierówności (7).

Dla kątów α spełniających nierówność

$$\mathrm{tg}\alpha > \frac{5}{2}\left(\frac{7}{5} f - \frac{k}{r} \right), \tag{16}$$

będzie zachodził poślizg i jednocześnie toczenie. W tej sytuacji M i T są określone wzorami (1) i (2), a równania ruchu (10) i (11) przyjmują postać:

$$ma = mg\sin\alpha - f\,mg\cos\alpha$$

$$I\varepsilon = -k\,mg\cos\alpha + f\,rmg\cos\alpha.$$

Jako rozwiązania tego układu równań otrzymujemy:

$$a = g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

oraz

$$\varepsilon = \frac{5}{2}\frac{g}{r}\cos\alpha\left(f - \frac{k}{r} \right).$$

Możemy też znleźć prędkość poślizgu

$$\upsilon_{\mathrm{p}} = \upsilon - \omega r = (a - \varepsilon r)t$$

$$v_{\mathrm{p}} = gt\cos\alpha\left[\mathrm{tg}\alpha - \frac{5}{2}\left(\frac{7}{5}f - \frac{k}{r}\right)\right].$$

Jak łatwo sprawdzić, dla kątów spełniających warunek (16) zachodzi $v_{\mathrm{p}} > 0$. Oznacza to, że środek kulki porusza się szybciej, niżby to wynikało z jej prędkości kątowej.

Zestawienie wyników analizy ruchu kulki można przedstawić w postaci tabelki:

	Spoczynek	Toczenie bez poślizgu	Toczenie z poślizgiem
$\mathrm{tg}\alpha$	$0 \div \frac{k}{r}$	$\frac{k}{r} \div \frac{5}{2}\left(\frac{7}{5}f - \frac{k}{r}\right)$	$\frac{5}{2}\left(\frac{7}{5}f - \frac{k}{r}\right) \div \infty$
a	0	$\frac{5}{7}g\left(\sin\alpha - \frac{k}{r}\cos\alpha\right)$	$g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
ε	0	$\frac{a}{r}$	$\frac{5}{2}\frac{g\cos\alpha}{r^2}(fr - k)$
v	0	at	at
ω	0	$\frac{v}{r}$	εt