Rozwiązanie zadania T1.

Z warunków równowagi mechanicznej wynika

$$m_1 g + p_0 S_1 - N = pS_1, \quad m_2 g + p_0 S_2 - N = pS_2, \tag{1}$$

gdzie N jest siłą naciągu nici, p – ciśnieniem gazu wewnątrz cylindrów, a $S_i = \pi R_i^2$, $i = 1, 2$. Stąd

$$p = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{(S_1 - S_2)} + p_0. \tag{2}$$

Widzimy, że p nie zmienia się podczas podgrzewania gazu i przesunięcia tłoków. Ciepło dostar czone do gazu jest równe zmianie całkowitej energii układu

$$Q = nC_V \Delta T + (m_1 g + p_0 S_1)\, z_1 + (m_2 g + p_0 S_2)\, z_2, \tag{3}$$

gdzie z_i jest przesunięciem do góry i – tego tłoka, przy czym $z_2 = -z_1$. Zmiana objętości gazu wyniesie

$$\Delta V = z_1 S_1 + z_2 S_2 \tag{4}$$
$$= nR\Delta T/p, \tag{5}$$

przy czym w (5) skorzystaliśmy z równania stanu gazu doskonałego.

Korzystając z (4), (5) wyznaczamy przesunięcie tłoków

$$z_1 = -z_2 = \frac{\Delta V}{S_1 - S_2} = \frac{nR\Delta T}{p\,(S_1 - S_2)} \tag{6}$$
$$= \frac{nR\Delta T}{p_0 \pi \left(R_1^2 - R_2^2\right) + (m_1 - m_2)\, g}. \tag{7}$$

Wstawiając otrzymane z_1, z_2 do równania (3) otrzymamy

$$Q = nC_V \Delta T + \left[\frac{(m_1 - m_2)\, g}{S_1 - S_2} + p_0\right] \frac{nR}{p} \Delta T \tag{8}$$
$$= n\,(C_V + R)\, \Delta T = nC_p \Delta T. \tag{9}$$

Powyższy wynik można otrzymać natychmiast wykorzystując to, że ciśnienie wewnątrz cylindrów jest stałe – wyrażenie (9) jest standardowym wyrażeniem na ciepło w przemianie izobarycznej.

Po podstawieniu danych liczbowych dostaniemy

$$Q = n\,(C_V + R)\, T \approx 14,5 \text{ J}, \tag{10}$$
$$z_1 = -z_2 = \frac{nRT}{p_0 \pi \left((r_1)^2 - (r_2)^2\right) + (m_1 - m_2)\, g} \approx 7,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}. \tag{11}$$

Uwaga: Po wyznaczeniu na podstawie podanych danych liczbowych siły naciągu nici okazuje się, że jest ona ujemna, co oznacza, że nić nie może byc napięta. Otrzymany wynik liczbowy odpowiada zatem sytuacji, w której zamiast nici mamy inny mechanizm zapewniający warunek $z_1 = -z_2$. Jeśli zawodnik zauważył ten problem i pokazał występowanie wymienionej sprzeczności, otrzymuje 1 pkt. za część zadania odpowiadającą wyznaczeniu wyników liczbowych oraz dodatkowo do 4 pkt. za część teoretyczną (patrz punktacja).

Punktacja zadania T1.

Warunki równowagi mechanicznej (wzory 1 lub równoważne) – 1 pkt.

Ciśnienie wewnątrz cylindrów (wzór 2 lub równoważny) - 2 pkt.

Warunek $z_1 = -z_2$ oraz związek zmiany objętości z przesunięciami tłoka (wzór 4 lub równoważny) – 1 pkt.

Związek zmiany objętości z temperaturą i ciśnieniem (wzór 5 lub równoważny) – 1 pkt.

Przesunięcie tłoków (wzór 7 lub równoważny) lub zauważenie (z uzasadnieniem), że podane dane liczbowe są sprzeczne z założeniem, że nić jest napięta – 2 pkt.

Dostarczone ciepło (wzór 9 lub równoważny) lub zauważenie (z uzasadnieniem), że podane dane liczbowe są sprzeczne z założeniem, że nić jest napięta – 2 pkt.

Wyniki liczbowe (wzory 1 lub równoważne) lub zauważenie (z uzasadnieniem), że podane dane liczbowe są sprzeczne z założeniem, że nić jest napięta – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T2.

Niech A oznacza punkt pierwszego uderzenia kulki w czaszę, O – środek sfery, której fragmentem jest wewnetrzna powierzchnia czaszy, natomiast niech α będzie kątem padania kulki na powierzchnię (kątem, jaki tworzy odcinek OA z pionem). Z treści zadania $\sin\alpha = (R/2)/R$, stąd $\alpha = 30^o$. Ponieważ odbicia są doskonale sprężyste, kąt odbicia β jest równy kątowi padania. Zatem tuż po pierwszym odbiciu prędkość kulki tworzyła kąt $\gamma = 90^o - (\alpha + \beta) = 30^o$ z poziomem.

Zauważmy, że aby kulka mogła powrócić do swojego początkowego miejsca po czterech odbiciach od czaszy, jej tor musi być symetryczny względem osi czaszy, a zatem za drugim razem powinna uderzyć w czaszę w odległości $R/2$ od jej osi. Zasięg l rzutu ukośnego jest dany wzorem

$$l = \frac{v^2 \sin 2\gamma}{g}, \tag{12}$$

gdzie w naszym przypadku $l = 2 \cdot R/2 = R$, a v jest prędkością kulki tuż po pierwszym odbiciu. Stąd

$$v^2 = \frac{gR}{\sin 2\gamma}. \tag{13}$$

Z drugiej strony, z zasady zachowania energii

$$mgH = mv^2/2, \tag{14}$$

gdzie m jest masą kulki. Zatem szukana wysokość H wynosi

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{R}{2\sin 2\gamma} \tag{15}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{3}}. \tag{16}$$

Punktacja zadania T2.

Wyznaczenie kąta, jaki tworzyła z poziomem prędkość kulki $\vec{v}$ tuż po pierwszym odbiciu (30^o) – 2 pkt.

Zauważenie, że tor kulki musi być symetryczny względem osi czaszy (lub stwierdzenie równoważne) – 3 pkt.

Wyznaczenie prędkości v na podstawie zasięgu (wzór 13 lub równoważny) – 2 pkt.

Związek między prędkością v a wysokością H (wzór 14 lub równoważny) – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór 16) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T3.

Jeśli pominiemy masę pręta oraz działającą na niego siłę elektrodynamiczną, każdy z ciężarków będzie poruszał się niezależnie, drgając z częstością $\omega = \sqrt{k/m}$. Odchylenie i – tego ciężarka od położenia równowagi w chwili t wynosi

$$x_i = z_i \cos \omega t, \tag{17}$$

gdzie z_i jest odchyleniem w chwili początkowej $t = 0$.

Pole ograniczone przez obwód elektryczny wynosi $S = l \cdot \left(h + \frac{x_1+x_2}{2}\right)$, gdzie h jest długością sprężynek w stanie równowagi. Zgodnie z prawem Faradaya, siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie wynosi

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(BS) = -\frac{d}{dt}\left(Bl \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \tag{18}$$

$$= \frac{Bl(z_1 + z_2)}{2}\omega \sin \omega t = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t, \tag{19}$$

gdzie $\mathcal{E}_{\max} = \frac{Bl(z_1+z_2)}{2}\omega$. Natężenie prądu płynącego w obwodzie wynosi $I = \mathcal{E}/R$, zatem ciepło wytwarzane w trakcie jednego drgania (trwającego $T = 2\pi/\omega$) jest równe

$$Q_1 = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{2R} T = \frac{B^2 l^2 (z_1 + z_2)^2}{8R}\omega^2 T \tag{20}$$

$$= \frac{B^2 l^2 (z_1 + z_2)^2}{8R} 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{21}$$

Energia mechaniczna drgań wynosi $E_{\text{mech}} = k\left(z_1^2 + z_2^2\right)/2$, zatem szukany współczynnik jest równy

$$\frac{Q_1}{E_{\text{mech}}} = \frac{B^2 l^2 \pi}{2R\sqrt{km}} \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1^2 + z_2^2}. \tag{22}$$

W rozpatrywanych przypadkach szczególnych otrzymamy

$$\frac{Q_1}{E_{\text{mech}}} = \begin{cases} 2\frac{B^2 l^2 \pi}{2R\sqrt{km}} & \text{dla} \quad z_1 = d,\ z_2 = d; \\ 0 & \text{dla} \quad z_1 = -d,\ z_2 = d; \\ \frac{B^2 l^2 \pi}{2R\sqrt{km}} & \text{dla} \quad z_1 = 0,\ z_2 = d. \end{cases} \tag{23}$$

Wartości liczbowe wynoszą

$$\frac{Q_1}{E_{\text{mech}}} = \begin{cases} 1,0 \cdot 10^{-3} & \text{dla} \quad z_1 = d,\ z_2 = d; \\ 0 & \text{dla} \quad z_1 = -d,\ z_2 = d; \\ 0,5 \cdot 10^{-3} & \text{dla} \quad z_1 = 0,\ z_2 = d. \end{cases} \tag{24}$$

W powyższym rozwiązaniu ruch układu wyznaczyliśmy pomijając działającą na pręt siłę elektrodynamiczną. Jednak w długim czasie, siła elektrodynamiczna, choć mała, powoduje tłumienie drgań i należy ją uwzględnić.

W przypadku $z_1 = d,\ z_2 = d$ pręt jest poziomy i na każdy z ciężarków działa taka sama siła tłumiąca – zatem pręt nadal będzie drgał pozostając w pozycji poziomej (nie zmieni się charakter ruchu), ale amplituda drgań będzie malała (po bardzo długim czasie do zera).

Najprostsza sytuacja jest w przypadku $z_1 = -d,\ z_2 = d$: tutaj nie indukuje się siła elektromotoryczna ($S = \text{const}$), nie płynie prąd i nie ma tłumienia. Zatem po bardzo dużym czasie ani charakter, ani amplituda drgań nie ulegnie zmianie.

W przypadku $z_1 = 0,\ z_2 = d$ natężenie prądu płynącego w każdym fragmencie pręta jest takie same, zatem wszędzie wzdłuż niego działa taka sama siła elektrodynamiczna. Oznacza to, że drgania ciężarka (2) będą tłumione, natomiast zostaną wzbudzone drgania ciężarka (1). Będzie to trwać do momentu, gdy ciężarki będą drgały zaczną drgać w przeciwnej fazie i z tą samą amplitudą – tak jak w drugim z rozpatrywanych przypadków $z_1 = -d$, $z_2 = d$. Odtąd amplituda drgań nie będzie się już zmieniała.

Ogólną metodą analizy dowolnego ruchu naszego układu jest przedstawienie go jako złożenia drgań „typu 1" (w których pręt pozostaje poziomy) i drgań „typu 2" (w których środek pręta się nie porusza). Gdy pierwsza składowa zostanie wytłumiona, pozostanie tylko składowa druga. Łatwo wykazać, że w naszym trzecim przypadku ($z_1 = 0,\ \ z_2 = d$) amplituda końcowa będzie wynosiła $d/2$ – nie było to jednak wymagane od uczestników Olimpiady.

Punktacja zadania T3.

Zależność położeń ciężarków od czasu (wzór 17 wraz z $\omega = \sqrt{k/m}$ lub wzory równoważne) – 2 pkt.

Siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie (wzór 19 lub równoważny) – 2 pkt.

Ciepło wydzielane w trakcie jednego drgania (wzór 21 lub równoważny) – 1 pkt.

Szukany stosunek w poszczególnych przypadkach (wzory 23) – 1 pkt.

Wartości liczbowe szukanego stosunku w poszczególnych przypadkach (wzory 24) – 1 pkt.

Opis ruchu układu po bardzo długim czasie w przypadkach $z_1 = -d,\ z_2 = d$ oraz $z_1 = d,\ z_2 = d$ – 1 pkt.

Opis ruchu układu po bardzo długim czasie w przypadku $z_1 = 0,\ z_2 = d$ – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania numerycznego T4.

Poniżej x_n, y_n, odpowiada położeniu „fotonu”, s_k to wartość sinusa kąta α_k, jaki tworzy (dalszy) kierunek biegu promieni z osią Y, p_k to pomocnicza wielkość, odpowiadająca s_k wyliczonemu na podstawie prawa załamania, c_k to cosinus kąta α_k (z uwzględnieniem znaku), z_k to znak cosinusa kąta α_k ($= +1$ gdy promień biegnie do "góry" tzn. y rosnie, -1 gdy promień biegnie do "dołu" tzn. y maleje), o_k – czy mamy do czynienia z odbiciem (0 =nie, 1 =tak), n_k– wartość współczynnika załamania. Wskaźnik k odpowiada numerowi kroku obliczeń (chwili t_k). Stałymi są wielkości n_0, b oraz d – odstęp między kolejnymi wartościami x.

Krok wstępny: przypisanie wartości stałym; $n_0 = 10$, $b = -10$. Wartość d ustalono wstępnie na $0,01$, po obejrzeniu przebiegu promienia dla różnych wartości α_0 skorygowano ją na $0,0005$.

Krok 0*:* przypisanie $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $s_0 = \sin(\alpha_0)$, $c_k = \cos(\alpha_0)$, $p_0 = s_0$, $z_0 = 1$, $o_0 = 0$.

Krok k:

- przesunięcie „fotonu”, do nowego położenia: $x_k = x_{k-1} + d$, $y_k = y_{k-1} + d \cdot c_{k-1}/s_{k-1}$;

- wyznaczenie wartości współczynnika załamania w nowym położeniu: $n_k = n_0 + b \cdot y_k$;

- wstępne wyznaczenie wartości $\sin\alpha_k$, oznaczonej jako p_k, na podstawie prawa załamania $n_{k-1}\sin\alpha_{k-1} = n_k \sin\alpha_k$: $p_k = n_{k-1}s_{k-1}/n_k$; obliczona wartość p_k może mieć moduł większy od 1 – oznacza to, że w tym przypadku mamy do czynienia z odbiciem, a „foton”, przebywa w tym miejscu wirtualnie; gdy $|p_k| > 1$ przypisujemy $o_k = 1$, w przeciwnym razie $o_k = 0$;

- ustalenie nowego kierunku biegu promienia:

jeśli $o_k = 0$ (nie ma odbicia) to $z_k = z_{k-1}$ (jeśli promień biegł w górę, dalej będzie biegł w górę, jeśli biegł w dół, dalej będzie biegł w dół) $s_k = p_k$ (zgodnie z prawem załamania), $c_k = z_k\sqrt{1-(s_k)^2}$ (korzystamy z jedynki trygonometrycznej i z tego, że z_k "pamięta" znak $\cos\alpha_k$

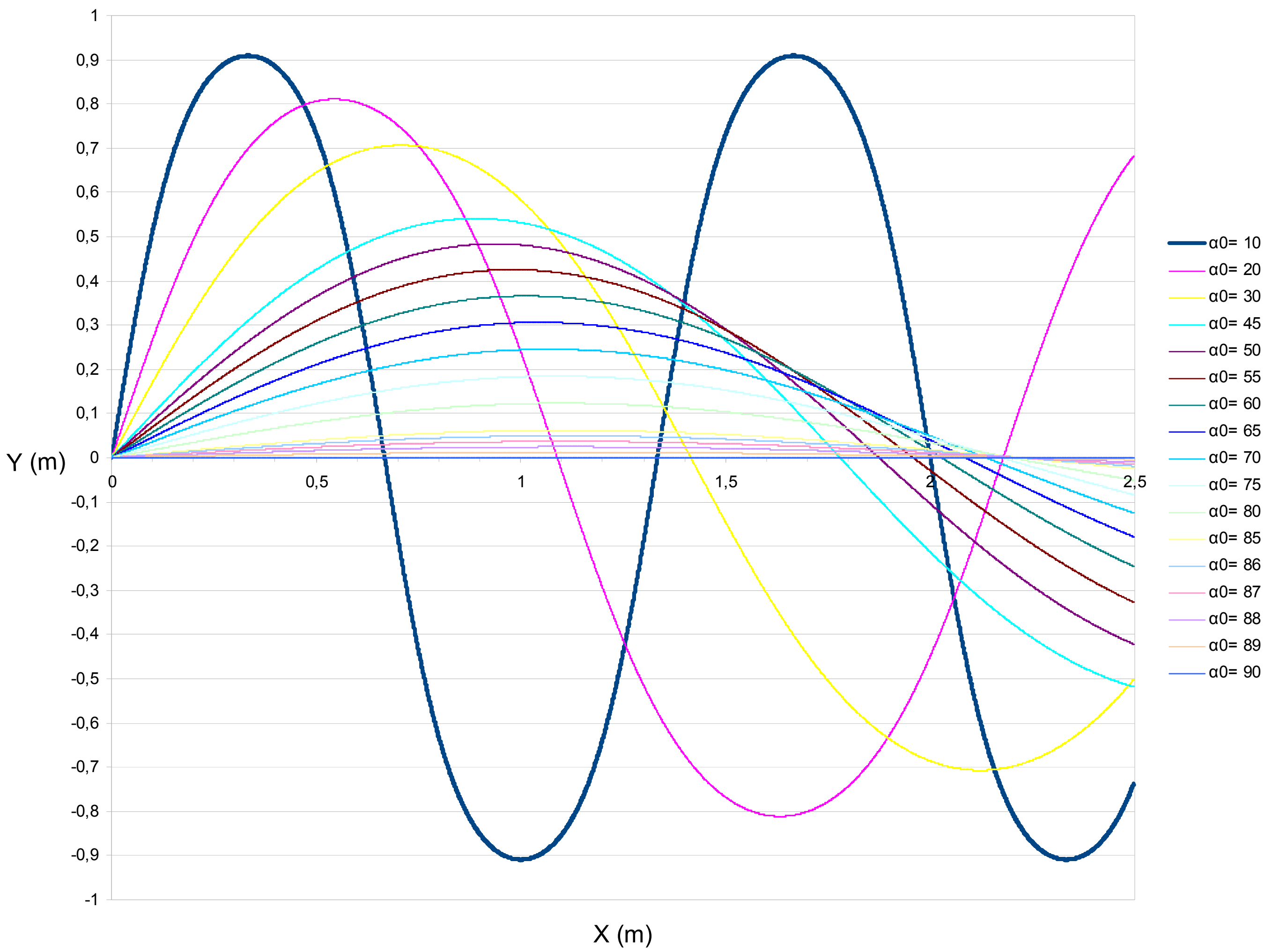
jeśli $o_k = 1$ (jest odbicie) to $z_k = -z_{k-1}$ (jeśli promień biegł w górę, to teraz będzie biegł w dół, jeśli biegł w dół, teraz będzie biegł w górę) $s_k = s_{k-1}$ (odbicie!), $c_k = z_k\sqrt{1-(s_k)^2}$ (lub po prostu $c_k = -c_{k-1}$).

Implementacja powyższego algorytmu została dokonana na dwa sposoby: w programie komputerowym napisanym w języku *C++* oraz w arkuszu kalkulacyjnym. Są one dostepne na stronie *http://www.kgof.edu.pl.* Poniżej omówiono bardziej szczegółowo implementację przy użyciu arkusza kalkulacyjnego.

W przypadku arkusza kalkulacyjnego numer kroku odpowiada względnemu numerowi wiersza, zmienne x, y, n itp. odpowiadają kolumnom, a x_k, y_k, n_k – komórkom arkusza. Na podstawie wartości kolumn x, y stworzono w ramach tego samego arkusza wykres. Następnie tak dopasowywano wartość d i i liczbę kroków (wierszy), by dla każdej z rozważanej wartości otrzymany wykres był gładki i by w przypadku okresowości (małe kąty α_0), fragmenty biegu promienia odpowiadające poszczególnym okresom były wizualnie identyczne. Sprawdzono również, że przy zmniejszeniu d widoczny na wykresie bieg promienia nie uległ zmianie. Ostatecznie przyjeto liczbę kroków równą 5000, a $d = 2,5/5000 = 0,0005$.

Po ustaleniu parametrów i widoku arkusza powielono go (skopiowano) w ramach tego samego skoroszytu, ustawiając w każdym z powstałych arkuszy inną wartość α_0, tak by otrzymać tor promienia dla każdej z wartości α_0 podanej w treści zadania. Następnie dodano jeszcze jeden arkusz, zawierający na jednym wykresie tory we wszystkich rozważanych przypadkach.

Otrzymany wykres jest przedstawiony na rysunku.



Na podstawie tego wykres można przyjąć, że promienie o α_0 zbliżonym do 90^o ogniskują sie w jednym punkcie, odległym od punktu początkowego o ok. $2,2\,\mathrm{m}$.

Punktacja zadania numerycznego

Opis przyjętej metody, w tym wyjaśnienie sposobu postępowania w przypadku "odbicia" – 4 pkt.

Wykres zgodny z przedstawionym wykresem wzorcowym – 4 pkt.

Stwierdzenie, że promienie o α_0 zbliżonym do 90^o ogniskują sie w jednym punkcie i podanie przybliżonej odległości punkt początkowy – ognisko (ok. $2,2\,\mathrm{m}$) – 2 pkt.