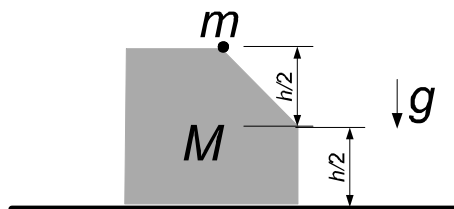


Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1



Rys. 1.

Rozważmy klocek (patrz Rys. 1) o masie M , którego jedna część jest ścięta pod kątem 45° do poziomu. Wysokość klocka wynosi h , a ścięta część kończy się na wysokości $h/2$. Klocek może ślizgać się bez tarcia po poziomym stole.

Na klocku położono małe ciało o masie m (patrz Rys. 1), które zaczęło się ześlizgiwać bez tarcia po klocku.

Rozważając dwa przypadki:

a) $M \gg m$;

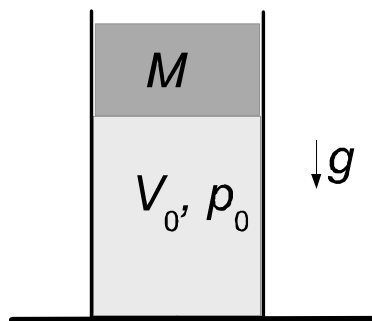
b) $M \ll m$;

wyznacz odległość d między klockiem a ciałem w chwili, gdy ciało uderzy w stół.

W którym z tych przypadków szukana odległość jest większa?

Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Zadanie T2



Rys. 2.

Cylinder z tłokiem o masie M i powierzchni S jest ustawiony pionowo w polu grawitacyjnym o natężeniu g (patrz Rys. 2). Cylinder jest wypełniony jednoatomowym gazem doskonałym, początkowo o temperaturze T_0 i objętości V_0 . Gaz jest izolowany termicznie od otoczenia. Między ściankami cylindra a tłokiem nie występuje tarcie, a na zewnątrz cylindra jest próżnia. Na tłoku postawiono ciężarek o masie m . Wyznacz temperaturę T_k gazu po ustaleniu się stanu równowagi. Pomiń pojemność cieplną cylindra i tłoka.

Zadanie T3

Elektryczna „czarna skrzynka” z dwoma wyprowadzeniami została dołączona do źródła napięcia 5 V. Po tym dołączeniu natężenie płynącego prądu zmieniało się w czasie. Przez pierwsze kilka mikrosekund wynosiło około 1 A, po upływie 1 ms było bliskie 0,5 A przez kolejne kilka milisekund. Po 1 s przez skrzynkę płynął prąd o natężeniu około 2 A, które prawie nie zmieniało się przez dowolnie długi czas. Zaprojektuj wnętrze tej czarnej skrzynki, wykorzystując tylko oporniki, cewki i kondensatory – w sumie nie więcej niż 6 elementów. Podaj parametry (oporność, indukcyjność lub pojemność) użytych elementów.

Zadanie T4 – numeryczne

Rozważ małą kulkę o masie $m = 0,1$ kg zawieszoną na nici o długości $l = 1$ m. Oprócz siły ciężkości na kulkę działa siła oporu proporcjonalna do kwadratu prędkości: $F_{\text{oporu}} = b \cdot v^2$. W chwili $t = 0$ nitka jest odchylona od pionu o kąt 90° .

Wyznacz numerycznie zależność od czasu kąta, o jaki nić odchyła się od pionu, w przedziale czasu od 0 do 100 s i wykonaj odpowiedni wykres dla stałych b równych 0 kg/m, 0,0025 kg/m oraz 0,01 kg/m.

Dla każdego z wykresów podaj czas, po którym amplituda drgań spadnie do połowy oraz czas, po którym spadnie do jednej czwartej początkowej wartości.

Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,81$ m/s².

Uwaga:

Rozwiązanie powinno zawierać:

- (i) wzory używane w rozwiązaniu wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem;
- (ii) opis zastosowanego algorytmu;
- (iii) opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz ze sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników;
- (iv) wykresy ruchu kulki dla każdej z podanych wartości b ;
- (v) czasy, o których mowa w poleceniu;
- (vi) jakościowe omówienie otrzymanych wyników.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub programów wyznaczających tor lub ruch automatycznie po podaniu wzoru na siłę.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

Rozwiązanie zadania T1.

Przypadek a)

Z uwagi na dużą masę klocka możemy przyjąć, że pozostaje on nieruchomy, natomiast ciało najpierw zsuwa się z wysokości $h/2$ po pochyłej części klocka, a następnie spada swobodnie z wysokości $h/2$ z prędkością początkową skierowaną pod kątem 45° do pionu.

Z zasady zachowania energii wnioskujemy, że w momencie oderwania od klocka wartość prędkości ciała jest równa

$$v_1 = \sqrt{gh}. \quad (1)$$

Pozioma składowa prędkości to $v_{\text{poz}} = v_1/\sqrt{2}$, a pionowa składowa to $v_{\text{pion}} = v_1/\sqrt{2}$. Oznaczając przez t czas swobodnego spadku ciała, mamy

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}gt^2 + v_{\text{pion}}t, \quad (2)$$

$$d = v_{\text{poz}} \cdot t. \quad (3)$$

Rozwiązując równanie kwadratowe na t i wybierając dodatni pierwiastek, otrzymujemy

$$t = \frac{-v_{\text{pion}} + \sqrt{(v_{\text{pion}})^2 + gh}}{g}. \quad (4)$$

Zatem w przypadku a)

$$d = \frac{-\sqrt{gh/2} + \sqrt{gh/2 + gh}}{g} \cdot \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}h. \quad (5)$$

Przypadek b)

W tym przypadku ze względu na swą znikomą masę klocek nie wpływa na ruch ciała, więc porusza się ono w kierunku pionowym z przyspieszeniem g . Z zasady zachowania energii stwierdzamy, że w chwili oderwania ciało ma skierowaną pionowo prędkość $v_{\text{pion}} = v_1 = \sqrt{gh}$. Więzy powodują, że w tym momencie klocek ma prędkość $v_{\text{poz}} = v_1$ skierowaną poziomo. W przypadku b) również obowiązują wzory (2), (3) i (4), ale z innymi wartościami v_{pion} oraz v_{poz} . Uwzględniając ten fakt, otrzymujemy

$$d = \frac{-\sqrt{gh} + \sqrt{gh + gh}}{g} \sqrt{gh} = (\sqrt{2} - 1)h. \quad (6)$$

Szukana odległość jest większa w przypadku b).

Punktacja zadania T1

Jakościowy opis zachowania układu w przypadku a) – 1 pkt.

Prędkość ciała w chwili oderwania w przypadku a) (obie składowe) – 1 pkt.

Wzory pozwalające na wyznaczenie szukanej odległości (wzory (2), (3) i (4) lub równoważne) – 3 pkt.

Odległość w przypadku a) (wzór (5)) – 1 pkt.

Jakościowy opis zachowania układu w przypadku b) – 1 pkt.

Prędkość ciała w chwili oderwania w przypadku b), w tym zauważenie, że jest ona pionowa – 1 pkt.

Odległość w przypadku b) (wzór (6)) – 1 pkt.

Wniosek, że szukana odległość w przypadku b) jest większa niż w przypadku a) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T2

W stanie początkowym spełniony jest warunek równowagi mechanicznej oraz równanie stanu gazu doskonałego

$$p_0 = Mg/S, \quad (7)$$

$$p_0 V_0 = NRT_0, \quad (8)$$

gdzie p_0 jest ciśnieniem w cylindrze, N – liczbą moli gazu w cylindrze, a R – uniwersalną stałą gazową.

Po postawieniu na tłoku ciężarka o masie m tłok zacznie się obniżać ze wzrastającą prędkością. Objętość gazu będzie malała, a ciśnienie będzie wzrastać. Nawet gdy ciśnienie w cylindrze osiągnie $(M + m)g/S$, ze względu na bezwładność tłok nadal będzie się obniżał. Po osiągnięciu pewnej minimalnej wysokości tłok zacznie się podnosić, a następnie znowu opuszczać. Będą występowały drgania tłoka (podnoszenie i opuszczanie). Ten proces nie jest procesem odwracalnym – podczas sprężania gazu siła działająca na tłok jest nieco większa niż podczas rozprężania. W efekcie, mimo izolacji termicznej od otoczenia, energia wewnętrzna gazu będzie wzrastać kosztem energii drgań tłoka. Po odpowiednio długim czasie drgania tłoka ustaną.

W stanie końcowym mamy równowagę mechaniczną

$$p_k = (M + m)g/S, \quad (9)$$

oraz spełnione jest równanie stanu gazu doskonałego

$$p_k V_k = NRT_k, \quad (10)$$

gdzie p_k, V_k oraz T_k są odpowiednio ciśnieniem, objętością i temperaturą gazu w stanie końcowym.

Z zasady zachowania energii zmniejszenie energii potencjalnej cylindra i masy jest równe wzrostowi energii wewnętrznej gazu, czyli

$$\frac{3}{2}NR(T_k - T_0) = (M + m)gd, \quad (11)$$

gdzie d jest wysokością, o jaką obniżył się tłok, równą

$$d = \frac{V_0 - V_k}{S}. \quad (12)$$

Po przekształceniach dostajemy

$$T_k = \left(1 + \frac{2}{5} \frac{m}{M}\right) T_0. \quad (13)$$

Punktacja zadania T2

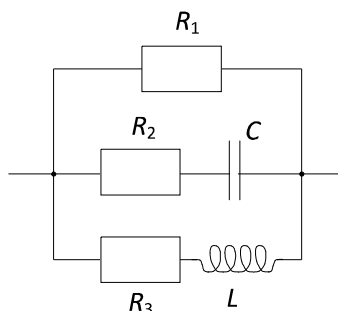
Warunek równowagi mechanicznej w stanie końcowym (wzór (9)) – 2 pkt.

Zasada zachowania energii (wzór (11) lub równoważny) – 3 pkt.

Wykorzystanie równania stanu gazu doskonałego – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (13)) – 3 pkt.

Rozwiązanie zadania T3



Rys. 1. Schemat układu realizującego warunki zadania.

Jednym z możliwych rozwiązań jest schemat zamieszczony na Rys.1. Wykorzystuje on fakty, że cewka przeciwstawia się zmianom płynącego przez nią prądu, natomiast przez naładowany kondensator prąd nie płynie.

Obecność cewki w dolnej gałęzi powoduje, że w chwili początkowej prąd płynie tylko przez górną i środkową gałąź, zatem $R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 5 \Omega$ (kondensator początkowo nie jest naładowany, więc w tym momencie nie przeciwstawia się on płynięciu prądu). Przy odpowiednim doborze parametrów C i L (zob. niżej) po czasie 1 ms prąd w środkowej gałęzi zaniknie (kondensator będzie naładowany), zanim zaczną płynąć znaczący prąd w gałęzi dolnej, stąd $R_1 = 10 \Omega$, a z oporu zastępczego podanego wyżej mamy $R_2 = 10 \Omega$. Wreszcie po długim czasie prąd będzie płynął zarówno w górnej, jak i w dolnej gałęzi. Ponieważ prąd płynący w górnej gałęzi ma natężenie 0,5 A, w dolnej będzie płynął prąd o natężeniu 1,5 A, czyli $R_3 = 3,33 \Omega$.

Czas charakterystyczny dla zmian prądu w obwodzie RC jest rzędu iloczynu $R \cdot C$, a w obwodzie RL – rzędu ilorazu L/R . Dlatego wartość $R_2 C$ powinna być większa od $1 \mu s$ i mniejsza od $1 ms$ – np. $0,2 ms$ ($C \approx 20 \mu F$), natomiast wartość L/R_3 powinna być większa od $1 ms$ i mniejsza od $1 s$, np. $0,2 s$ ($L \approx 0,7 H$).

Punktacja zadania T3

Wykorzystanie kondensatora jako elementu niemającego wpływu na początkowy przepływ prądu, ale blokującego ten przepływ po naładowaniu – 2 pkt.

Wykorzystanie cewki jako elementu blokującego początkowo przepływ prądu, ale pozwalającego na ten przepływ po dłuższym czasie – 2 pkt.

Układ prowadzący do oczekiwanego zachowania na 1. etapie (pierwsze kilka mikrosekund) wraz z podaniem wartości parametrów liczbowych odpowiednich elementów – 2 pkt.

Układ prowadzący do oczekiwanego zachowania na 2. etapie (po upływie 1 ms) wraz z podaniem wartości parametrów liczbowych odpowiednich elementów – 2 pkt.

Układ prowadzący do oczekiwanego zachowania na 3. etapie (po upływie 1 s) wraz z podaniem wartości parametrów liczbowych odpowiednich elementów – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

Równania ruchu

Kulka porusza się po okręgu o promieniu l . Styczna do okręgu składowa siła działająca na kulkę jest dana wzorem

$$F_s = -mg \sin \alpha - b \cdot v \cdot |v|,$$

gdzie α jest kątem odchylenia nici od pionu, $-mg \sin \alpha$ – odpowiednią składową siły ciężkości (znak „–” wskazuje, że siła ta przeciwstawia się odchyleniu), $v = l \frac{d\alpha}{dt}$ – prędkością kulki, $-b \cdot v \cdot |v|$ – siłą oporu (taki zapis gwarantuje, że jest ona skierowana przeciwnie do prędkości).

Ruch kulki jest zatem określony przez równanie

$$\varepsilon = -\frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{bl}{m} \omega |\omega|,$$

Gdzie $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$. Równanie to można przepisać w postaci układu równań

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{bl}{m} \omega |\omega|, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \omega. \end{aligned}$$

Gdy wprowadzimy zmienne bezwymiarowe $T = \sqrt{\frac{g}{l}} t$, $\Omega = \omega / \sqrt{\frac{g}{l}}$, ten układ równań przyjmie

postać zawierającą tylko jedną stałą $B = \frac{bl}{m}$

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dT} &= -\sin \alpha - B \cdot \Omega |\Omega|, \\ \frac{d\alpha}{dT} &= \Omega.\end{aligned}$$

Do powyższych równań należy dodać warunek, że dla $T = 0$ (czyli $t = 0$)

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \Omega = 0. \quad (14)$$

Algorytm numeryczny

W celu rozwiązania numerycznego zamieniamy $\frac{d\alpha}{dT} \rightarrow \frac{\Delta\alpha}{\Delta T}$, $\frac{d\Omega}{dT} \rightarrow \frac{\Delta\Omega}{\Delta T}$, gdzie ΔT odpowiada różnicy między wartością w chwili T_n oraz w chwili $T_{n+1} = T_n + \Delta T$. Prowadzi to do układu równań różnicowych. Istnieje bardzo wiele algorytmów pozwalających na numeryczne rozwiązanie rozważanego zagadnienia. W niniejszym rozwiązaniu krok dzielimy na dwie części: najpierw wyznaczamy położenie w chwili $T_n + \Delta T/2$, w tym położeniu obliczamy siłę, na jej podstawie wyznaczamy prędkość w chwili $T_n + \Delta T$, a następnie położenie w chwili $T_n + \Delta T$. W efekcie dostajemy następujący układ równań rekurencyjnych wiążący odchylenie kulki w chwili T_n z odchyleniem w chwili T_{n+1} :

$$\alpha_{n+1/2} = \alpha_n + \Omega_n \cdot \Delta T/2, \quad (15)$$

$$\Omega_{n+1} = \Omega_n - (\sin \alpha_{n+1/2} + B \cdot \Omega_n |\Omega_n|) \cdot \Delta T, \quad (16)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1/2} + \Omega_{n+1} \cdot \Delta T/2. \quad (17)$$

Algorytm odpowiadający powyższym równaniom jest przy tej samej wartości ΔT znacznie dokładniejszy od algorytmu, w którym położenie i prędkość w chwili $T_n + \Delta T$ wyznaczamy wprost na podstawie siły odpowiadającej położeniu w chwili T_n .

Do powyższego układu równań należy dodać warunki (14) odpowiadające chwili $T = 0 = T_0$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \Omega_0 = 0. \quad (18)$$

Powyższe równania rekurencyjne (15)–(17) można wykorzystać w arkuszu kalkulacyjnym. W arkuszu dostępnym na stronie www.kgof.edu.pl utworzono kolumny

n	α_n	Ω_n	$\alpha_{n+1/2}$	Ω_{n+1}	α_{n+1}	T	t (s)
-----	------------	------------	------------------	----------------	----------------	-----	---------

gdzie n jest numerem kroku (i jednocześnie numeruje wiersze), a wyrażenia w pozostałych kolumnach odpowiadają wyrażeniom pojawiającym się w rozważanych równaniach rekurencyjnych. Wartości α_n oraz Ω_n dla $n = 0$ są określone na podstawie wartości początkowych. Na podstawie wartości z kolumn α_n oraz t (s) sporządzono wykres, przy czym wzięto pod uwagę wiersze dla t od 0 do 100 sekund.

Rozważane równania rekurencyjne bardzo łatwo jest również przekształcić na program komputerowy, który oblicza w pętli kolejne wartości położenia i prędkości zgodnie z następującym pseudokodem (ponieważ większość programów komputerowych nie akceptuje greckich liter, zamiast α , Ω oraz ΔT użyliśmy odpowiednio oznaczeń **alfa**, **Omega** oraz **dT**)

```

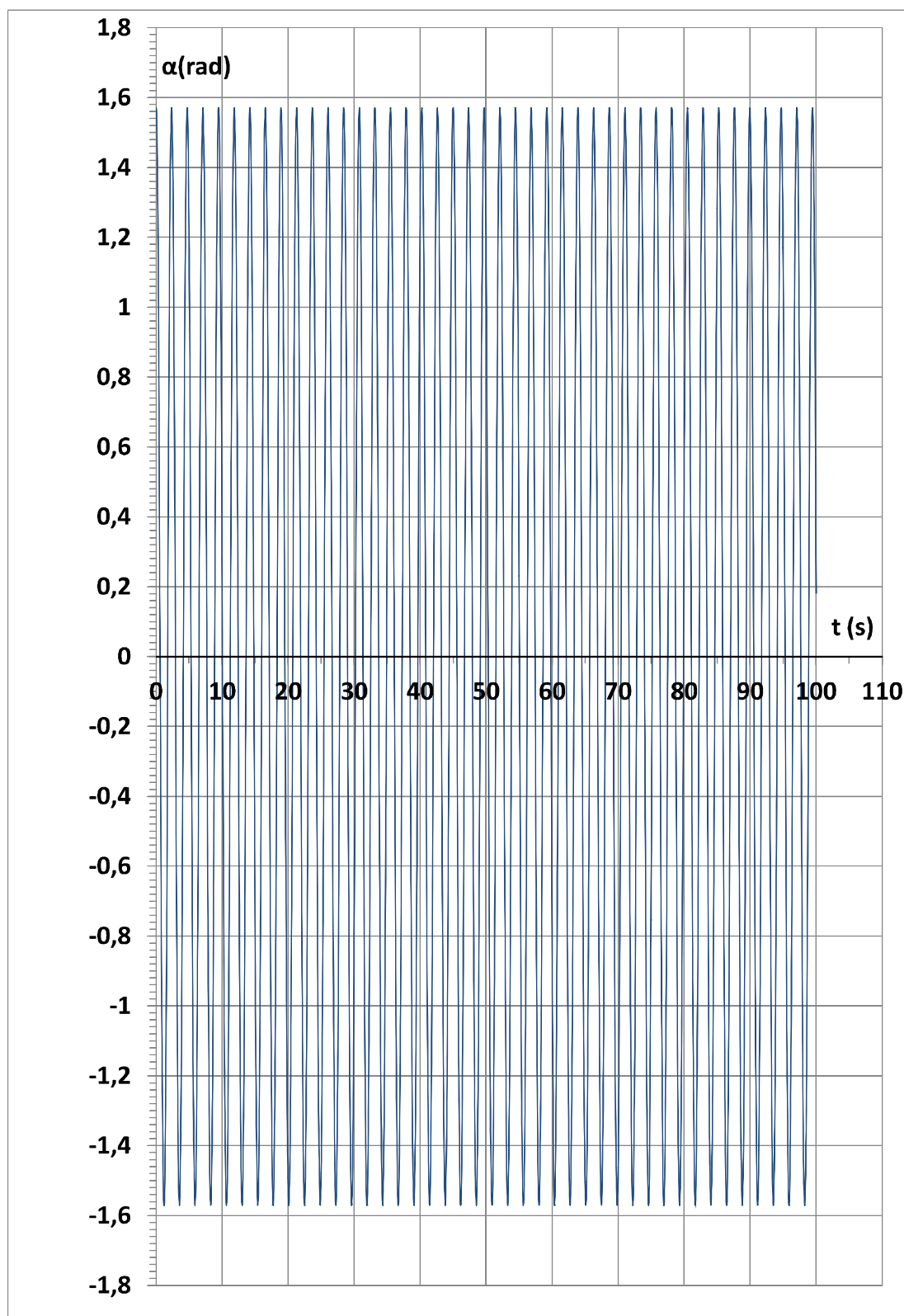
alfa= alfa + Omega * dT/2
Omega= Omega - (sin(alfa) + B * Omega * abs(Omega)) * dT
alfa= alfa + Omega * dT/2

```

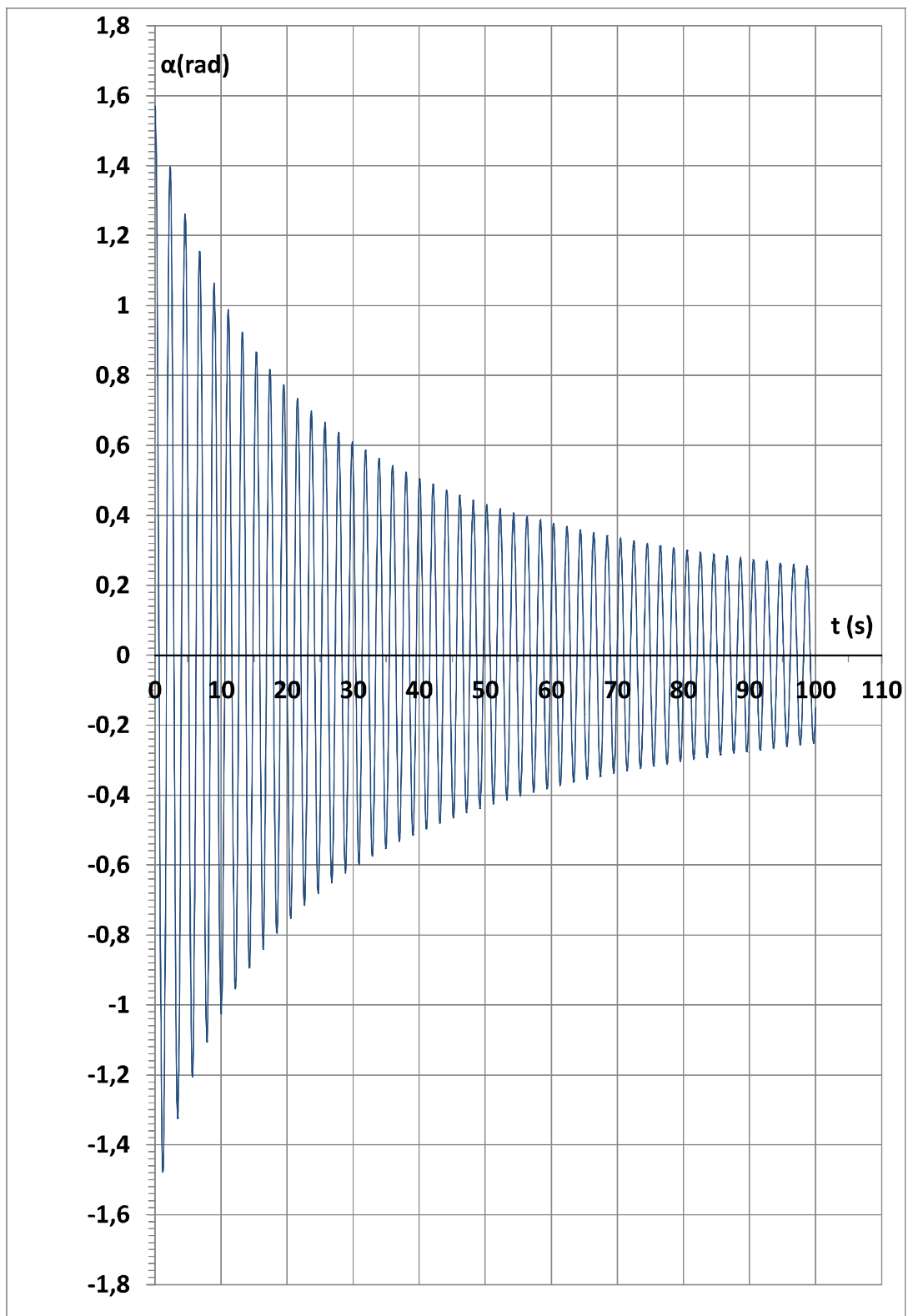
Do powyższych poleceń wykonywanych w pętli należy dodać przypisanie początkowych wartości zmiennym **alfa** oraz **Omega**, zapisywanie wartości **alfa** i **Omega** obliczonych w danym kroku (lub rysowanie) oraz warunek końca iteracji (chwila $t = 100$ s, czyli $T = \sqrt{\frac{g}{l}}100$ s = 313). Programy w C++ oraz w Logo działające zgodnie z powyższym algorytmem są dołączone do rozwiązania dostępnego na stronie KGOF.

Krok czasowy oraz sprawdzenie dokładności

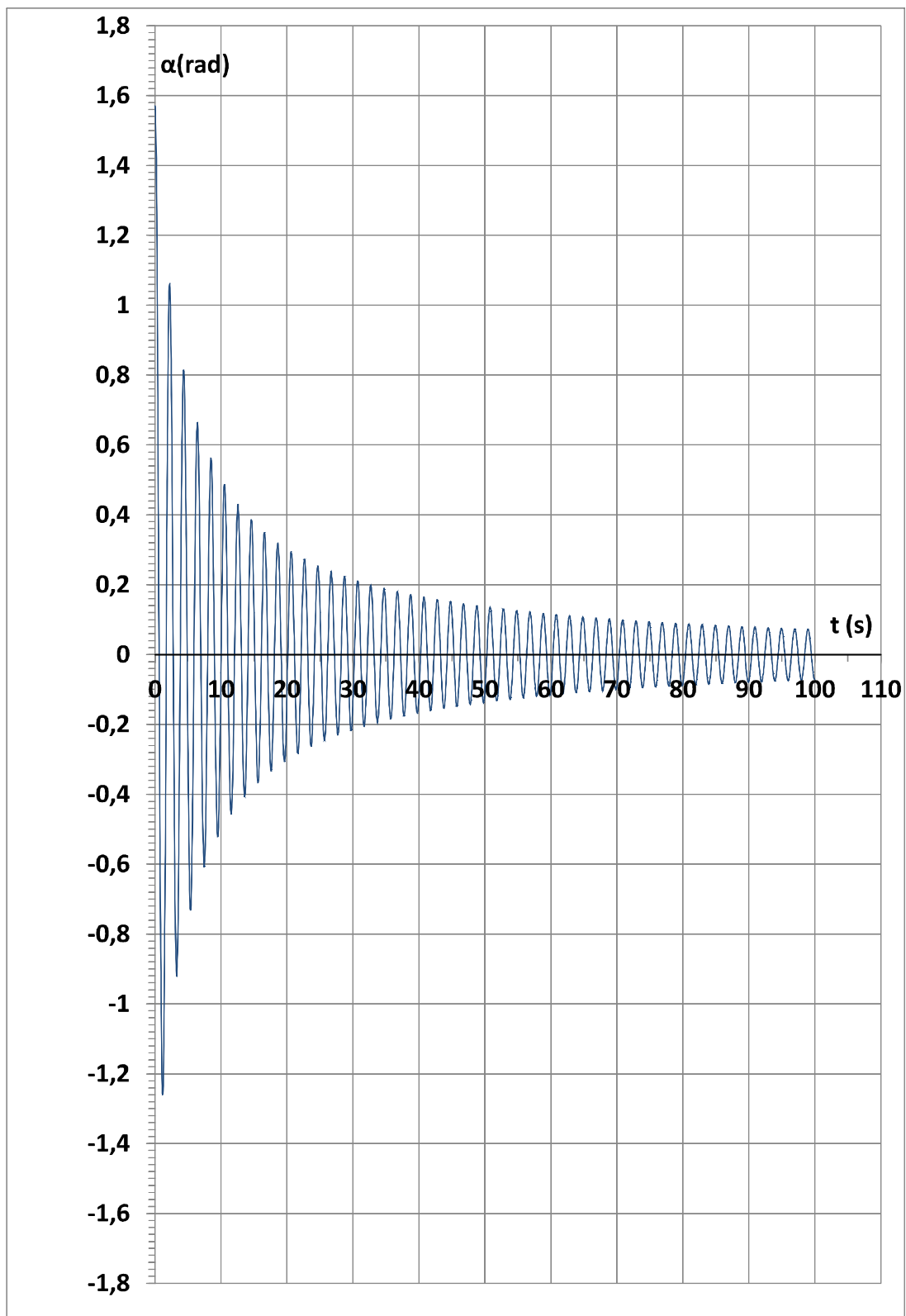
Dla każdej z podanych w treści zadania wartości parametru b wykonano wykresy dla $\Delta T = 0,1565$ (2000 kroków) oraz $\Delta T = 0,07825$ (4000 kroków) dla czasu t od 0 s do 100 s. Ponieważ dla danego b wykresy były wizualnie nieodróżnialne, a w szczególności końcowe położenie ciała było takie samo (w ramach dokładności odczytu położenia z wykresu) dla obu rozważanych wartości ΔT , uznano, że $\Delta T = 0,07825$ gwarantuje wystarczającą dokładność.



Rys 2. Wykres ruchu kulki dla $b = 0$.



Rys 3. Wykres ruchu kulki dla $b = 0,0025 \text{ N s}^2/\text{m}^2$.



Rys 4. Wykres ruchu kulki dla $b = 0,01 \text{ N s}^2/\text{m}^2$.

Wstępna dyskusja otrzymanych wykresów

W przypadku $b = 0$ zgodnie z oczekiwaniami mamy do czynienia z drganiami nietłumionymi. Dla $b > 0$ drgania są tłumione, przy czym szybkość tłumienia wzrasta ze wzrostem b .

Czas, po którym amplituda drgań spadnie do połowy, oraz czas, po którym spadnie do jednej czwartej początkowej wartości

Szukane czasy wyznaczono z wykresu. Zgodnie z poleceniem odczytano czasy odpowiadające maksymalnym wartościom odchylenia zbliżonym do $\pi/4 = 0,79$ oraz do $\pi/8 = 0,39$.

Otrzymane wartości są następujące:

- dla $b = 0$: drgania nie są tłumione, zatem szukane czasy nie istnieją,
- dla $b = 0,0025$: czas spadku amplitudy do połowy $T_{1/2} \approx 19$ s, czas spadku amplitudy do jednej czwartej $T_{1/4} \approx 57$ s,
- dla $b = 0,01$: czas spadku amplitudy do połowy $T_{1/2} \approx 5$ s, czas spadku amplitudy do jednej czwartej $T_{1/4} \approx 14$ s.

Zauważmy, że ponieważ drgania są tłumione, pojęcie amplitudy drgań nie jest dokładnie określone. Ponieważ okres drgań wynosi około 2 s i ze względu na niedokładności przy odczytywaniu danych z wykresu, przyjęto, że niepewność powyższych wyników wynosi 1 s.

Dyskusja otrzymanych czasów tłumienia oraz otrzymanych wykresów

Zauważmy, że w obu przypadkach, w których występuje tłumienie, mamy $T_{1/4} > 2 \cdot T_{1/2}$ (podczas gdy w przypadku siły oporu proporcjonalnej do prędkości zachodziłaby równość $T_{1/4} = 2 \cdot T_{1/2}$, tak jak dla rozpadu promieniotwórczego). Jest to zgodne z oczekiwaniem – szybszy wzrost tłumienia ze wzrostem prędkości oznacza równocześnie szybszy spadek tłumienia ze spadkiem prędkości, a więc ze spadkiem amplitudy. Również przyjrzenie się otrzymanym wykresom, szczególnie w przypadku $b = 0,01$, prowadzi do wniosku, że początkowo mamy do czynienia z silnym tłumieniem, jednak dla większych czasów (powyżej 60 s) szybkość spadku amplitudy drgań znacząco maleje.

Punktacja zadania T4 (numerycznego)

Równanie ruchu kulki wraz z warunkami początkowymi – 1 pkt.

Układ równań różnicowych lub rekurencyjnych pozwalający na numeryczne wyznaczenie ruchu – 1 pkt.

Opis algorytmu oraz sposobu jego implementacji – 1 pkt.

Przedstawienie sposobu weryfikacji prawidłowości otrzymanych wykresów – 2 pkt.

Wykresy zgodne z przedstawionymi w rozwiązaniu wzorcowym – 2 pkt.

Czasy tłumienia zgodne z otrzymanymi powyżej (wraz z podaniem niepewności wyniku) – 2 pkt.

Jakościowe omówienie otrzymanych wyników – 1 pkt.

Uwaga: nie jest wymagane, aby rozwiązanie zawierało przejście do zmiennych bezwymiarowych.