XXIX OLIMPIADA FIZYCZNA (1979/1980). Etap II, zadanie doświadczalne – D.

Źródło: W. Gorzkowski: Olimpiady fizyczne XXIII i XXIV. WSiP, Warszawa 1977.

Autor: Waldemar Gorzkowski, KG OF

Nazwa zadania: Optyczna „czarna skrzynka”

Działy: Optyka geometryczna

Słowa kluczowe: Pryzmat, soczewka, ogniskowa, odbicie światła, załamanie światła, czarna skrzynka

Zadanie 6, doświadczalne – D1, zawody stopnia II, XXIX OF.

Dana jest „czarna skrzynka” w postaci pudełka z dwoma otworami 1 i 2 (rys. 1), zawierająca pewien układ optyczny. Wiadomo, że układ ten składa się z soczewki cienkiej umieszczonej przy jednym z otworów i pryzmatu o kątach 90°, 45° i 45°.

Mając do dyspozycji: źródło światła – żarówkę z baterią, papier milimetrowy (1 arkusz formatu A3), ekran z podstawką, ustal:
- jak ustawione są soczewka i pryzmat w czarnej skrzynce,
- jaka jest ogniskowa soczewki.

Uwaga: Opracowanie danych można sobie ułatwić przez udowodnienie, a następnie skorzystanie z następującego twierdzenia:

Prosta przechodząca przez punkt o współrzędnych (f, f) przecina osie współrzędnych w punktach x_0 i y_0 takich, że:

$$\frac{1}{x_o} + \frac{1}{y_o} = \frac{1}{f}$$

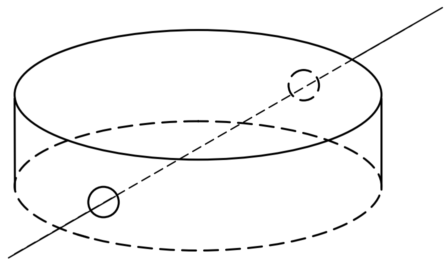
Astygmatyzm układu zaniedbujemy.

Rozwiązanie

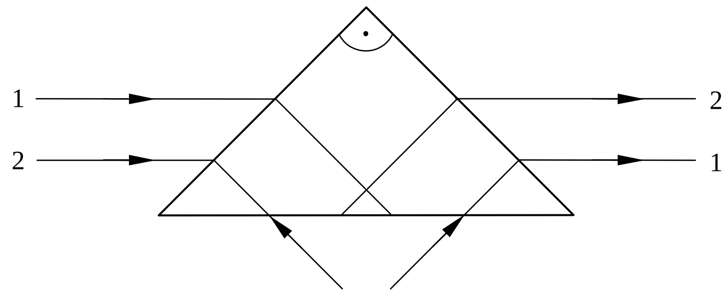
Z faktu, że przez pudełko można patrzeć na wprost jak przez lupę, która dodatkowo odbija w płaszczyźnie prostopadłej do podstawy pudełka i równoległej do odcinka łączącego otwory, jak również z faktu, że obraz jest bez aberracji chromatycznej wynika, że soczewka jest soczewką skupiającą, a w pryzmacie musi zachodzić zwierciadlane odbicie obrazu.

Stąd wynika, że promienie w pryzmacie biegną jak na rysunku 2 (ściana trójkąta jest równoległa do podstawy pudełka, a przeciwprostokątna jest równoległa do prostej łączącej otwory). Dla uproszczenia zaznaczono tylko dwa promienie, aby wykazać, że w rozważanej konfiguracji zachodzi odwrócenie obrazu. Tak więc pryzmat i soczewka są ustawione jedno za drugim, a na przeciwprostokątnej zachodzi całkowite wewnętrzne odbicie promieni.

Należy teraz rozstrzygnąć, przy którym otworze, nr 1 czy nr 2, znajduje się soczewka (na pierwszy rzut oka nie można tego zrobić, gdyż w jednym z otworów umieszczona jest soczewka, a przy drugim cienka szybka).



Rys. 1



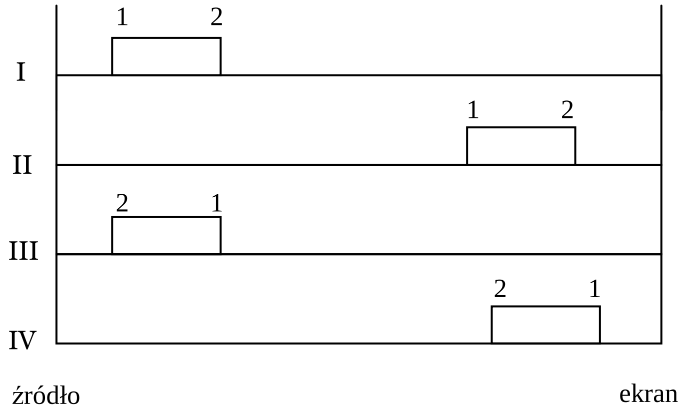
Całkowite wewnętrzne odbicie

Rys. 2

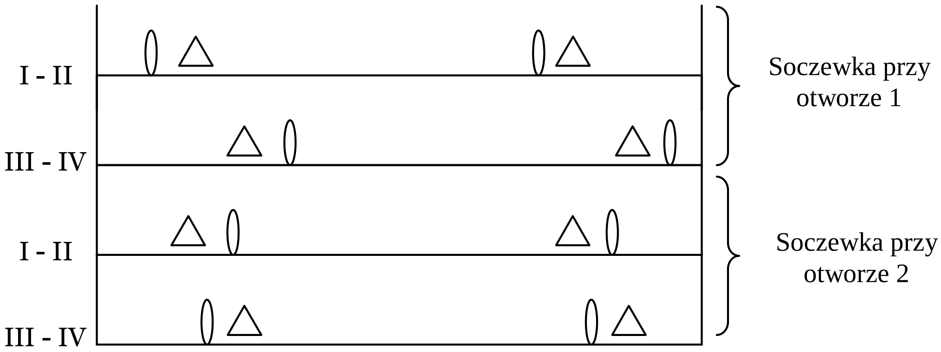
I tak przy położeniu I i II (rys. 3) czarna skrzynka jest ustawiona otworem nr 1 bliżej przedmiotu, a w położeniach III i IV (po odwróceniu pudełka) jest ustawiona otworem nr 2 bliżej przedmiotu. Wynik eksperymentu jest mniej więcej taki, jak pokazano na rysunku 3. Rozpatrując dwie hipotezy, że soczewka jest przy otworze 1 albo przy otworze 2, wynik eksperymentu możemy przedstawić jak na rysunku 4.

Przyjęcie hipotezy, że soczewka jest umieszczona przy otworze 1 (po odwróceniu pudełka), prowadzi do zmiany położenia soczewki o odległość większą niż średnica pudełka (≈ 10 cm), podczas gdy zmiana położenia soczewki musi być porównywalna ze zmianą ogniskowej przy przechodzeniu światła przez szkło pryzmatu (wydłużenie drogi optycznej, zmiana zbieżności wiązki). Stąd wniosek, że soczewka musi być umieszczona przy otworze 2.

Należy teraz wyznaczyć ogniskową soczewki. Najpierw udowodnimy twierdzenie podane w temacie zadania.



Rys. 3



Rys. 4

Prosta przechodząca przez punkt o współrzędnych (f, f) przecina osie współrzędnych w punktach x_0 i y_0 takich, że spełnione jest równanie:

$$\frac{1}{x_o} + \frac{1}{y_o} = \frac{1}{f} \qquad (1)$$

Załóżmy, że równanie prostej ma postać

$$y = ax + b$$

Na prostej tej ma leżeć punkt (f, f), to znaczy

$$f = af + b$$

skąd wynika, że

$$b = (1 - a)f$$

a zatem

$$y = ax + (1 - a)f \qquad (2)$$

skąd wynika, że:

dla $y = 0$

$$x_0 = \frac{a - 1}{a} f$$

dla $x = o$

$$y_0 = (1 - a)f$$

a wartości x_0 i y_0 spełniają równanie (1).
Oznacza to, że aby wyznaczyć graficznie ogniskową soczewki f na wykresie $y = f(x)$ (gdzie x – odległość przedmiotu od soczewki, a y – odległość obrazu od soczewki) należy połączyć ze sobą punkty (x_0, 0) i (0, y_0). Punkt leżący na przecięciu tej prostej z prostą $y = x$ ma współrzędne (f, f).

Wiedząc, przy którym otworze umieszczona jest soczewka, możemy wyznaczyć zależność odległości y' obraz – soczewka (poprzez pryzmat) od odległości x przedmiot – soczewka. Odległość y' nie jest równa odległości obrazu od soczewki y. Wielkości te różnią o się nieznaną zmianę położenia obrazu Δs związaną z przechodzeniem światła przez pryzmat

$$y' = y + \Delta s \qquad (3)$$

Zgodnie z wzorem soczewkowym musi zachodzić związek

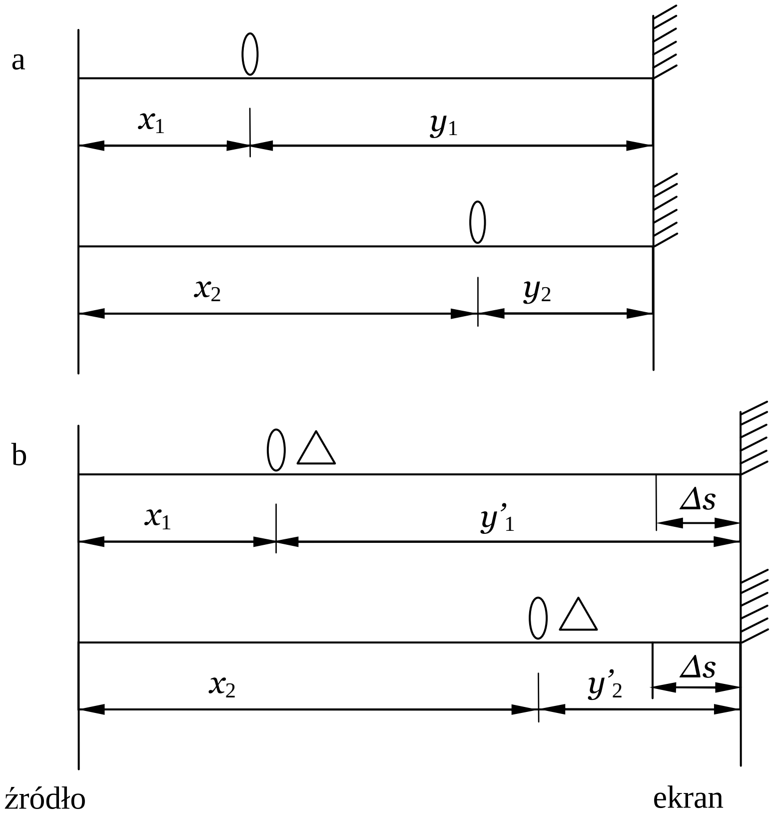
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

Ogniskową soczewki znajdujemy metodą graficzną wykorzystując podane twierdzenie. Na osi x odkładamy kolejno wartości pomiaru odległości x, a na osi y odpowiadające im wartości y. Następnie tak dobieramy przesunięcie Δs punktów y' wzdłuż osi y, aby proste łączące (x_1, 0) z (0, $y'_1 - \Delta s$), (x_2, 0) z (0, $y'_2 - \Delta s$), (x_3, 0) z (0, $y'_3 - \Delta s$) idt., przecinały się w jednym punkcie. Można to zrobić po kilku próbach, wykorzystując fakt, że punkt przecięcia musi leżećna prostej $y = x$.

Wielkość Δs oraz ogniskową f można również wyznaczyć rachunkowo bez korzystania z wykresu. Można to zrobić na przykład tak:
Najpierw, dla uproszczenia, rozpatrzmy powstanie obrazu, gdy mamy tylko samą soczewkę (Rys. 5a) przyjmując $x_1 = y_2$ oraz $x_2 = y_1$. Wówczas z (4) mamy:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{f} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{f} \qquad (5)$$

Jeżeli teraz za soczewką ustawimy pryzmat, który w każdym przypadku przesunie obraz o wielkość sΔ, wówczas będziemy mieli sytuację przedstawioną na rysunku 52b.



Rys. 5

Na podstawie związków (5) i (3) mamy

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y'_1 - \Delta s} = \frac{1}{f}$$

oraz:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{y'_2 - \Delta s} = \frac{1}{f} \tag{6}$$

Skąd wynikają związki

$$x_1 = y'_2 - \Delta s, \quad x_2 = y'_1 - \Delta s \tag{7}$$

czyli:

$$\Delta s_1 = y'_2 - x_1, \quad \Delta s_2 = y'_1 - x_2 \tag{8}$$

W jednej z prac otrzymano wyniki:

x_1 = 8,0 cm y'_1 = 31 cm
x_2 = 29,3 cm y'_2 = 9,7 cm
$\Delta s = \Delta s_1 = \Delta s_2$ = 1,7 cm

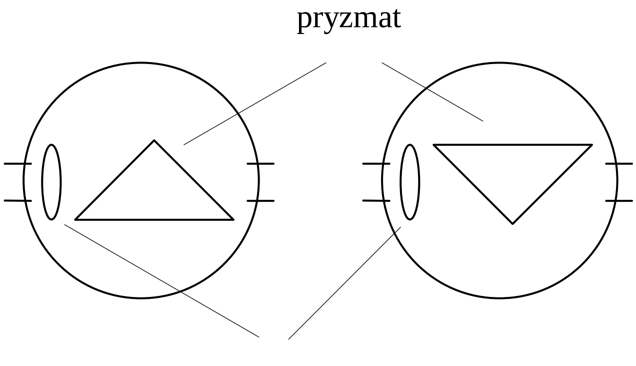
a obliczona ogniskowa soczewki po uwzględnieniu przesunięcia wynosi $f = 6{,}3$ cm.

Warto zauważyć, że z wartości przesunięcia obrazu Δs można oszacować dość dokładnie długość podstawy pryzmatu na podstawie wzoru (wyprowadzenie pozostawiam czytelnikom)

$$\Delta s = \frac{1}{2}\left(l - \frac{\cos\alpha}{n\cos\beta\cos(\alpha - \beta)}\right)$$

gdzie l – długość podstawy pryzmatu, n – współczynnik załamania szkła pryzmatu, np. $n = 1{,}6$, α – kąt padania ($\alpha = 45^\circ$), β – kąt załamania.

Zadanie sprawiło zawodnikom wiele kłopotów. Przede wszystkim nie wszyscy potrafili określić i w pełni uzasadnić położenia soczewki i pryzmatu oraz bieg promieni w pryzmacie. Tylko w kilku rozwiązaniach uwzględniono fakt zmiany drogi optycznej w pryzmacie w porównaniu z drogą promienia, który biegłby bezpośrednio z soczewki. Olbrzymia większość zawodników przyjęła $y' = y$ i na tej podstawie obliczyła ogniskową soczewki. Ci, którzy korzystali z metody wykresów, przypisywali fakt nie przecinania się prostych w jednym punkcie błędom eksperymentalnym. Tylko kilku uczniów zauważyło, że punkt przecięcia musi jednocześnie leżeć na prostej $y = x$. Jedynie dwóch uczestników zauważyło, że istnieją całkowicie równoważne położenia pryzmatu nierozróżnialne metodami optycznymi (Rys. 6). Wielu uczniów znajdowało położenie soczewki, badając obraz żarówki odbity od powierzchni szkła w otworku. Od strony soczewki widać było dwa obrazy charakterystyczne dla odbić od powierzchni kulistych. Taka metoda jest całkowicie poprawna.



Rys. 6