XXIX OLIMPIADA FIZYCZNA (1979/1980). Stopień III, zadanie doświadczalne – T2.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: *Fizyka w Szkole* nr 1, 1981.
Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska: Olimpiady Fizyczne XXIX – XXXI. WSiP, Warszawa 1986.

Nazwa zadania: Temperatura czarnej kulki umieszczonej w ognisku soczewki i ogrzanej promieniami słonecznymi.

Działy: Optyka geometryczna, termodynamika.

Słowa kluczowe: ciało doskonale czarne, stała słoneczna, temperatura, soczewka, ogniskowa, próżnia, przewodnictwo cieplne, bilans energii, promieniowanie, prawo Stefana–Boltzmanna.

Zadanie teoretyczne – T2, zawody III stopnia, XXIX OF.

Dana jest soczewka cienka o średnicy d = 5 cm i ogniskowej f = 10 cm. Za pomocą tej soczewki, przez zogniskowanie promieni słonecznych, chcemy maksymalnie ogrzać ciało doskonale czarne w postaci kulki o promieniu r. Wyznacz zależność temperatury, do której możemy ogrzać kulkę, od jej promienia r.

Zakładamy, że soczewka przepuszcza całe padające nań światło i że proces ogniskowania prowadzimy w próżni w otoczeniu o temperaturze T_0 = 300 K. Zakładamy ponadto, że kulka doskonale przewodzi ciepło, dzięki czemu w każdej chwili temperatura wszystkich jej punktów jest taka sama.

Dane:

1) stała słoneczna

$$S = 0{,}139\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}}$$

2) stała Stefana–Boltzmanna

$$\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{K}^4}$$

3) temperatura powierzchni Słońca

$$T_S = 6000\ \mathrm{K}$$

Uwaga: całkowita energia wypromieniowania w ciągu 1 s przez 1 cm^2 powierzchni ciała doskonale czarnego, zgodnie z prawem Stefana–Boltzmanna, wynosi σT^4, gdzie σ oznacza stałą Stefana–Boltzmanna, a T – temperaturę bezwzględną ciała.

Rozwiązanie

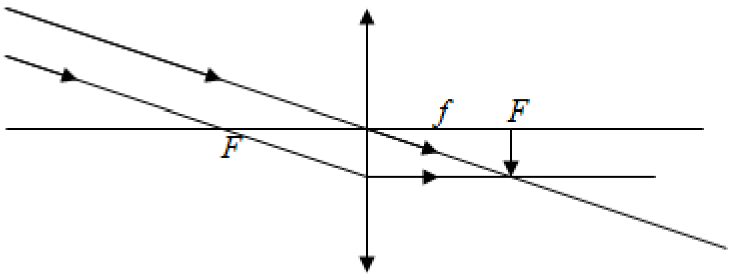
Obraz Słońca powstaje dokładnie w płaszczyźnie ogniskowej soczewki (rys. 1).
Obrazem Słońca jest koło o promieniu r_0 takim, że:

$$\frac{r_0}{f} = \mathrm{tg}\alpha \tag{1}$$

gdzie α – oznacza promień kątowy Słońca widzianego z Ziemi.

Ponieważ kąt α jest mały, można z dobrym przybliżeniem przyjąć, że tg$\alpha \approx \alpha$, a zatem:

$$r_0 = af\ \#$$



Rys. 1

Kiedy na kulkę doskonale czarną nie pada światło słoneczne, wówczas pozostaje ona w równowadze termicznej z otoczeniem, tzn. wypromieniowuje ona w jednostce czasu tyle energii, ile jej pochłania z otoczenia. Wartość tej energii zgodnie z prawem Stefana–Boltzmanna wynosi:

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \sigma T_0^4 \tag{2}$$

gdzie T_0 jest temperaturą, przy której występuje stan równowagi termicznej.

Gdy na kulkę skierujemy wiązkę światła słonecznego, wtedy pochłania ona energię tego światła. Jeżeli promień kulki r jest większy niż r_0, wówczas cała ogniskowana energia jest pochłaniana przez kulkę. Energia tego promieniowania dochodząca w ciągu 1 sekundy wynosi $\frac{1}{4}\pi d^2 S$. Oprócz tego kulka absorbuje, tak jak poprzednio, promieniowanie termiczne z otoczenia. Odpowiadający temu dopływ energii w ciągu 1 sekundy zgodnie z (2) wynosi $4\pi r^2 \sigma T_0^4$. Z drugiej strony kulka mając temperaturę T, wypromieniowuje w czasie 1 sekundy energię $4\pi r^2 \sigma T^4$. Ponieważ kulka doskonale czarna w stanie ustalonej temperatury emituje tyle energii, ile jej pochłania, bilans energii można więc zapisać w postaci:

$$4\pi r^2 \sigma T^2 = 4\pi r^2 \sigma T_0^4 + \frac{1}{4}\pi S d^2, \qquad r \geq af. \tag{3}$$

Stąd

$$T = \sqrt{T_0^4 + \frac{Sd^2}{16\sigma r^2}}. \tag{4}$$

Jeżeli promień kulki zmaleje poniżej $r_0 = af$, to pada na nią tylko część energii skupianej przez soczewkę, która wynosi:

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{1}{4}\pi S d^2$$

czyli

$$\frac{1}{4}\left(\frac{r}{af}\right)^2 \pi S d^2 .^{\#}$$

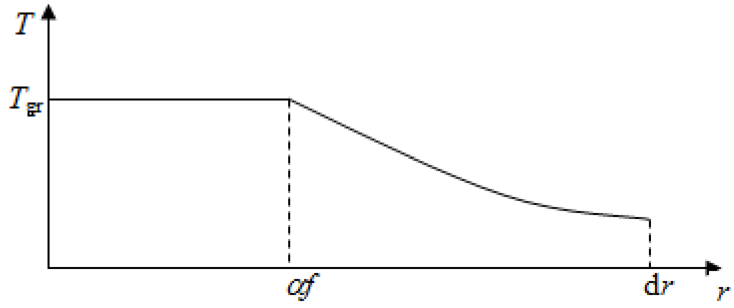
Bilans energii w tym przypadku jest następujący:

$$4\pi r^2 \sigma T^2 = 4\pi r^2 \sigma T_0^4 + \frac{1}{4}\pi S d^2 \left(\frac{r}{af}\right)^2, \qquad r < af. \tag{5}$$

Stąd

$$T = \sqrt[4]{T_0^4 + \frac{1}{16}\frac{S}{\sigma a^2}\frac{d^2}{f^2}} \quad \left(= T_{\text{gr}}\right). \tag{6}$$

Zauważmy, że temperatura ta jest stała i dalsze zmniejszanie rozmiarów kulki nie zwiększa T. Jest to temperatura graniczna T_{gr}. Wykres zależności $T(r)$ podany jest na rys. 2.



Rys.2

Dyskusję przypadku, gdy średnica kulki przekracza średnicę soczewki pozostawiamy Czytelnikowi.

Spróbujmy oszacować temperaturę graniczną T_{gr}. Zauważmy, że Słońce z bardzo dobrym przybliżeniem możemy traktować jako ciało doskonale czarne i wówczas zgodnie z prawem Stefana–Boltzmanna energia wypromieniowana przez powierzchnię Słońca w ciągu 1 sekundy zgodnie z (2) wynosi:

$$\frac{\mathrm{d}E_s}{\mathrm{d}t} = 4\pi R_{\text{s}}^2 \sigma T_{\text{s}}^4 . \tag{7}$$

Wiemy, że stała słoneczna, jest to ilość energii promienistej wysłanej przez Słońce w ciągu 1 sekundy przechodzącej przez 1 cm^2 powierzchni ustawionej prostopadle do kierunku Ziemia – Słońce w odległości od Słońca równej odległości Ziemia – Słońce, stąd możemy zapisać

$$S = \frac{4\pi R_{\text{s}}^2 \sigma T_{\text{s}}^4}{4\pi R_{\text{zs}}^2} \tag{8}$$

gdzie T_{S} – temperatura Słońca, R_{S} – promień Słońca, R_{ZS} – odległość Ziemia – Słońce.

Ponieważ promień kątowy Słońca α wynosi

$$\alpha = \frac{R_{\text{s}}}{R_{\text{ZS}}}$$

stąd otrzymany związek:

$$\frac{S}{a^2\sigma} = T_{\text{S}}^4 . \tag{9}$$

Po podstawieniu (9) do (6), otrzymujemy wzór na temperaturę graniczną kulki w postaci:

$$T_{gr} = \sqrt[4]{T_0^4 + \left(\frac{d}{4f}\right)^2 T_{\text{S}}^4} \approx T_{\text{s}}\sqrt{\frac{d}{4f}} . \tag{10}$$

Do tego samego rozwiązania, gdy promień kulki jest mniejszy od $r_0 = \alpha f$, można dojść stosując odmienna metodę. Zauważmy, że powierzchnię Słońca z kulki widać wewnątrz stożka o kącie rozwarcia 2β, gdzie:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{d}{2f}$$

tzn. w kącie bryłowym $\gamma_1 = 2\pi(1-\cos\beta)$ zaś otoczenie o temperaturze T_0 widać w kącie bryłowym $\gamma_2 = 2\pi(1+\cos\beta)$.

W jednostce czasu na kulkę, z kąta bryłowego γ_1 pada promieniowanie słoneczne o energii $\gamma_1 r^2 \sigma T_S^4$ (T_S – temperatura Słońca), a z kąta bryłowego γ_2 – promieniowanie otoczenia o energii $\gamma_2 r^2 \sigma T_0^4$ (T_0 – temperatura otoczenia). Kulka po ogrzaniu się do temperatury T emituje w jednostce czasu promieniowanie o energii $4\pi r^2 \sigma T^2$. W stanie równowagi termicznej bilans energetyczny ma postać

$$4\pi r^2 \sigma T^2 = \gamma_1 r^2 \sigma T_S^4 + \gamma_2 r^2 \sigma T_0^4$$

Podstawiając wielkości γ_1 oraz γ_2 otrzymamy

$$4\pi r^2 \sigma T^2 = 2\pi(1-\cos\beta) r^2 \sigma T_\mathrm{S}^4 + 2\pi(1+\cos\beta) r^2 \sigma T_0^4$$

Drugie wyrażenie można pominąć w porównaniu z pierwszym, gdyż T_S^4 jest znacznie większe od T_0^4.

Stąd można wyznaczyć temperaturę kulki

$$T = T_\mathrm{S} \sqrt[4]{\frac{1-\cos\beta}{2}} = T_\mathrm{S} \sqrt{\sin\frac{\beta}{2}}\,. \tag{11}$$

Jest to wielkość stała, niezależna od promienia kulki.

Dla małych kątów β można przyjąć

$$\sin\frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2} \approx \frac{d}{4f} \tag{12}$$

Stąd otrzymujemy

$$T_\mathrm{gr} = T_\mathrm{S} \sqrt{\sin\frac{\beta}{2}} = T_\mathrm{S} \sqrt{\frac{d}{4f}} \tag{13}$$

Uzyskany wzór jest identyczny z poprzednio wyprowadzonym wzorem (10). Jak z niego widać, temperatura graniczna uzyskiwana przez kulkę zależy od parametrów soczewki, nie może jednak przekroczyć temperatury Słońca T_S. Dla cienkiej soczewki $\frac{d}{f} \le 1$, zatem nie można uzyskać temperatury bliskiej temperaturze Słońca.

W naszym przypadku $\frac{d}{4f} = \frac{1}{8}$, stąd temperatura graniczna

$$T_\mathrm{gr} = 2100\ \mathrm{K}.$$

Zauważmy, że promień kątowy Słońca $\alpha \approx 4{,}3$ mrad. Wynika stąd, że temperaturę taką można teoretycznie uzyskać dla $r \le 0{,}04$ mm (bo $r_0 \approx af$). Praktycznie wady soczewek powodują „rozmyte" ogniskowanie i nie obserwujemy aż tak wysokiej temperatury. Niemniej wiadomo, że w ognisku soczewki na skutek skupiania się tam promieni słonecznych można zapalić zapałkę.