

XXIX OLIMPIADA FIZYCZNA (1979/1980). Stopień W, zadanie teoretyczne – T3-A.

Źródło: XXIX – XXXI Olimpiada fizyczna.
Autor: Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska
Nazwa zadania: Moment bezwładności prostokątnej płyty
Działy: Kinematyka
Słowa kluczowe: moment bezwładności

Zadanie teoretyczne T3-A, zawody stopnia wstępnego, XXIXOF.

Rozwiąż wybrane przez siebie dwa zadania spośród poniższych trzech:

Oblicz moment bezwładności jednorodnej cienkiej płyty o masie m , mającej kształt prostokąta o bokach a i b , względem osi prostopadłej do płyty i przechodzącej przez jej środek.

Uwaga: Zadanie to należy rozwiązać bez całkowania.

Rozwiązanie

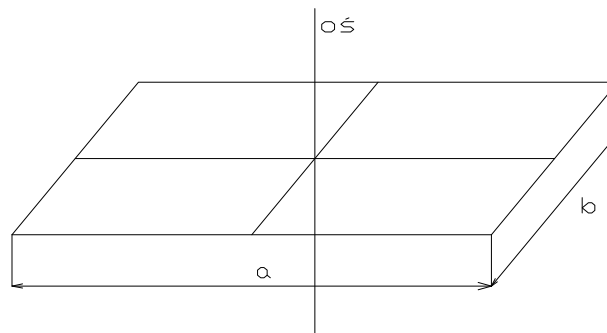
Moment bezwładności jednorodnej cienkiej płyty obliczymy stosując analizę wymiarową. Moment bezwładności jest wielkością o wymiarze $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. W treści zadania dana jest masa płyty m oraz jej wymiary a i b . Nieznany moment bezwładności płyty można wyrazić wzorem:

$$I = ama^2 f(a/b) \quad (1)$$

gdzie a jest stałą bezwymiarową, $f(a/b)$ również bezwymiarową funkcją, którą wprowadzamy, ponieważ na razie nie wiemy, w jakiej kombinacji wejdą wymiary a i b płyty do wzoru na moment bezwładności. Zarówno stałą a jak i funkcję $f(a/b)$ musimy teraz wyznaczyć.

W tym celu podzielimy płytę na cztery części. Moment bezwładności całej płyty względem osi do niej prostopadłej i przechodzącej przez jej środek masy jest równy sumie momentów bezwładności czterech ćwiartek płyty liczonych względem tej samej osi:

$$I = \left[a \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^2 f\left(\frac{a}{b} \right) + \frac{m}{4} \frac{1}{16} (a^2 + b^2) \right] \quad (2)$$



Rys . 1

Pierwszy wyraz w nawiasie oznacza moment bezwładności ćwiartki płyty względem osi przechodzącej przez jej środek masy. Drugi wyraz uwzględnia fakt, że oś, względem której chcemy wyznaczyć moment bezwładności, przechodzi przez środek masy całej płyty, odległy od środków masy każdej z ćwiartek o

$$\frac{1}{4}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Skorzystaliśmy tu z twierdzenia Steinera.

Porównując wzory (1) i (2) otrzymujemy:

$$a m a^2 f\left(\frac{a}{b}\right) = \left[a \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 f\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{m}{4} \frac{1}{16} (a^2 + b^2) \right]$$

stąd

$$a f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)$$

Szukany moment bezwładności płyty wynosi zatem:

$$I = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Proponowana punktacja

0-5 pkt