XXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1978/1979). Stopień III, zadanie teoretyczne – T3

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki:
Olimpiada Fizyczna XXVII – XXVII. WSiP, Warszawa 1983;
Fizyka w Szkole Nr 4, 1980

Nazwa zadania: Wyprowadzenie prawa Stefana – Boltzmanna

Działy: Termodynamika

Słowa kluczowe: II zasada termodynamiki, cykl Carnota, ciepło, temperatura, silnik, ciało doskonale czarne, promieniowanie elektromagnetyczne

Zadanie teoretyczne – T3, zawody teoretyczne III stopnia, XXVIII OF.

Rozpatrując silnik termodynamiczny, w którym ciałem roboczym jest promieniowanie elektromagnetyczne, pracujący w cyklu Carnota (pokazany na Rys. 1) i korzystając z II zasady termodynamiki wyprowadź prawo Stefana-Boltzmanna głoszące, że energia wypromieniowana przez jednostkę powierzchni ciała doskonale czarnego w ciągu jednostki czasu jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury bezwzględnej.

Uwaga:

1) W zadaniu skorzystaj ze związku:

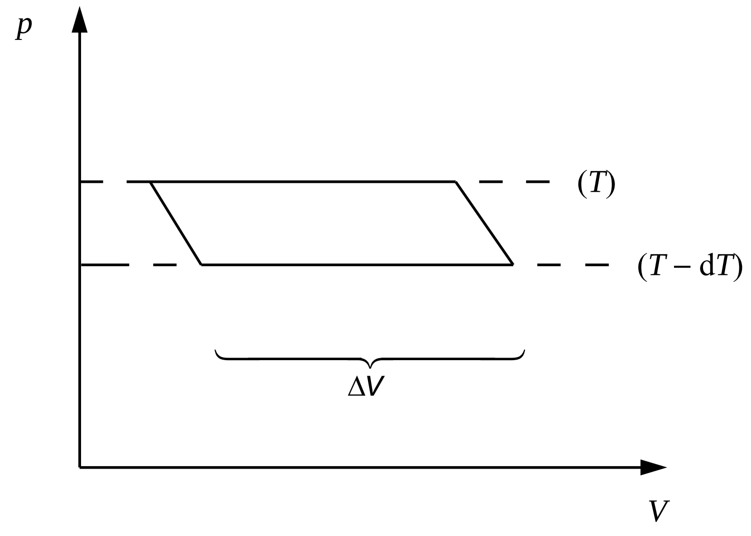
$$p = \frac{1}{3}u\ ,$$

gdzie: p oznacza ciśnienie promieniowania, u - jego objętościową gęstość energii. Związek ten był przedmiotem jednego z zadań olimpijskich i nie trzeba go dowodzić.

2) Sprawność silnika pracującego w cyklu Carnota wynosi:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

gdzie: T_1 oznacza temperaturę grzejnika, T_2 – temperaturę chłodnicy.



Rys. 1.

Rozwiązanie

Zgodnie ze wskazówką, z II zasady termodynamiki $\eta = \frac{dT}{T}$. Obliczmy teraz η korzystając z definicji sprawności. W tym celu musimy policzyć otrzymaną pracę i pobrane ciepło w jednym cyklu. Praca wynosi oczywiście

$$\underbrace{\Delta V p(T)}_{\text{praca na górnym odcinku poziomym}} \underbrace{- \Delta V p(T - dT)}_{\text{praca na dolnym odcinku poziomym}} =$$

$$= \Delta V p(T) - \Delta V[p(T) - dp] = \Delta V p(T) - \Delta V p(T) + \Delta V dp = \frac{1}{3} du \Delta V;$$

dp jest małą zmianą ciśnienia odpowiadającą małej zmianie temperatury dT.
Ciepło zaś jest równe:

$$\Delta(uV) + \Delta V p(T) = u\Delta V + \frac{1}{3} u \Delta V = \frac{4}{3} u \Delta V.$$

Zatem

$$\eta = \frac{1}{4} \frac{du}{u}.$$

Wobec tego

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{4} \frac{du}{u},$$

stąd

$$u(T) \sim T^4.$$

Przy obliczaniu pracy i ciepła zaniedbaliśmy efekty związane z odcinkami nierównoległymi do osi V. Uczyniliśmy tak dlatego, że odcinki te mają długość infinitezymalnie małą w stosunku do ΔV.

Wyznaczenie zależności gęstości promieniowania od temperatury nie kończy jeszcze zadania. Należałoby jeszcze dowieść, że energia E wysyłana przez jednostkę powierzchni np. wnęki z promieniowaniem w ciągu jednostki czasu jest proporcjonalna do u. Ten prosty dowód pozostawiamy Czytelnikowi. Tak więc:

$$E \sim u \sim T^4.$$