

XXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1978/79). Stopień III, zadanie teoretyczne – T2.

Źródło:	Komitet Główny Olimpiady Fizycznej; Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: Fizyka w Szkole nr 4, 1980; Olimpiada Fizyczna XXVII – XXVIII. WSiP, Warszawa 1983 r.
Nazwa zadania:	Przyspieszenie i wydzielone ciepło przy zsuwaniu się taśmy z równi pochyłej
Działy:	Dynamika, termodynamika
Słowa kluczowe:	II zasada dynamiki Newtona, ruch, energia kinetyczna, mechaniczna, pęd

Zadanie teoretyczne –T2, zawody teoretyczne stopnia III, XXVIII OF.

Na równi pochyłej o kącie nachylenia α leży cienka, nierozciągliwa, doskonale wiotka taśma. Strona taśmy zwrócona do równi jest wystarczająco chropowata, by taśma nie zsuwała się po równi, zaś jej strona górna jest idealnie gładka, tak że po zagięciu bardzo małego kawałka w górnym końcu taśmy rozpoczyna się jej zsuwanie po sobie samej - rysunek 1.



Rys. 1.

- 1) Zakładając, że ruch końca taśmy jest jednostajnie przyspieszony, oblicz wartość przyspieszenia a .
- 2) Oblicz ilość ciepła, jaka wydzielona została w ruchomej (zagiętej) części taśmy do chwili, w której jej energia kinetyczna osiągnęła wartość E_k . (Przyjmujemy, że do tego momentu zsunęło się mniej niż pół długości taśmy).

Rozwiązanie

W czasie dt do ruchu dołącza się część taśmy o długości dx . Jasne jest, że

$$v = 2 \frac{dx}{dt}$$

Niezerównoważoną siłą powodującą ruch jest składowa styczna siły ciężkości zagiętego odcinka taśmy o długości x . Masę tego odcinka oznaczmy przez m . Wartość rozważanej składowej stycznej wynosi oczywiście $mg \sin \alpha$.

Z II zasady dynamiki mamy

$$mg \sin \alpha = \frac{dp}{dt}$$

gdzie p oznacza pęd układu. Mamy

$$p = mv,$$

gdzie v oznacza prędkość zsuwającej się części taśmy.

Zatem

$$mg \sin \alpha = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}.$$

Ze względu na jednorodność taśmy mamy

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{x},$$

a więc

$$g \sin \alpha = \frac{dv}{dt} + \frac{v dx}{x dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{x}.$$

Zgodnie z treścią zadania nie szukamy ogólnego rozwiązania otrzymanego równania; interesuje nas bowiem tylko rozwiązanie odpowiadające ruchowi jednostajnie przyspieszonemu. Sprawdźmy, czy takie rozwiązanie istnieje. Innymi słowy, założmy że

$$v = at, \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} at^2 \quad (2)$$

i spróbujmy wyznaczyć a . Jeżeli okaże się, że można znaleźć takie stałe a , że $x(t)$ dane wzorem (2) będzie dobrym rozwiązaniem, to wszystko będzie w porządku. Jeżeli zaś nie, to by oznaczało, że coś z treścią zadania jest nie tak. Na szczęście po wstawieniu wzorów (1) i (2) do otrzymanego poprzednio równania dostajemy

$$g \sin \alpha = a + \frac{1}{2} \frac{a^2 t^2}{\frac{1}{4} at^2} = 3a.$$

Stąd

$$a = \frac{1}{3} g \sin \alpha.$$

Zwróćmy uwagę, że zgodnie z wzorami (1) i (2) dla $t = 0$ mamy

$$v(0) = 0,$$

$$x(0) = 0.$$

Oznacza to, że taśma będzie zsuwać się ruchem jednostajnie przyspieszonym wtedy, gdy początkowo odwinie się infimezymalnie mały kawałek taśmy, który będzie zsuwać się swobodnie bez prędkości początkowej. Gdyby początkowo odwinięty bardzo mały kawałek taśmy miał prędkość różną od zera, ruch taśmy byłby opisany inną funkcją $x(t)$ niż wyżej znaleziona.

Teraz znajdziemy odpowiedź na drugie z pytań. Zmiana energii potencjalnej wynosi

$$-m g x \sin \alpha,$$

zmiana zaś energii kinetycznej jest równa

$$\frac{1}{2} m v^2.$$

Całkowita zmiana energii mechanicznej jest zatem dana wzorem

$$\Delta E_{mech} = -m g x \sin \alpha + \frac{1}{2} m v^2;$$

ale

$$g x \sin \alpha = 3 a x = \frac{3}{4} a^2 t^2 = \frac{3}{4} v^2.$$

Wobec tego

$$\Delta E_{mech} = -\frac{1}{4} m v^2 = -\frac{1}{2} E_k.$$

Zmiana energii mechanicznej jest spowodowana stratami na ciepło. Tak więc podczas zsuwania się taśmy wydzieli się ciepło Q równe $\frac{1}{2} E_k$. Taśma przy zsuwaniu powinna się ogrzewać. Należy jednak zwrócić uwagę, że nie jest to wywołane tarciem. Po prostu każdy kawałek taśmy rozpoczynając swój ruch w pewny sensie ulega zderzeniu niesprężystemu z tą częścią taśmy, która już się poruszała, a podczas zderzeń niesprężystych energia kinetyczna się nie zachowuje.