XXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1978/1979). Stopień I, zadanie teoretyczne – T2.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Olimpiada Fizyczna XXVII – XXVIII WSiP Warszawa 1983

Autor: Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki

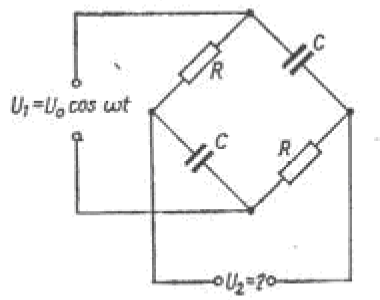
Nazwa zadania: Układ przesuwający fazę

Działy: Elektryczność

Słowa kluczowe: napięcie wyjściowe i wejściowe, zależność napięcia od czasu, obwód RC

Zadanie teoretyczne – T2, zawody I stopnia, XXVIII OF.

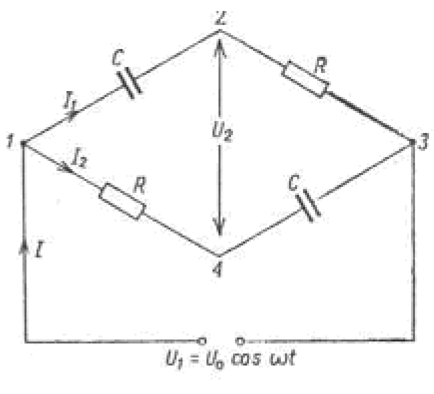
Dany jest układ pokazany na rysunku 1. Wiedząc, że napięcie wejściowe U_1, zmienia się sinusoidalnie, wyznacz zależność napięcia wyjściowego U_2 od czasu. Przedyskutować wyniki.



Rys. 1

Rozwiązanie

Zadanie sprowadza się do obliczenia napięcia $U_2 = U_{24}$ (rys.2).



Rys. 2

Mamy
$$I = I_1 + I_2, \tag{1}$$

$$Q_1 / C + RI_1 = U_0 \cos \omega t \tag{2}$$

$$RI_2 + Q_2 / C = U_0 \cos \omega t \tag{3}$$

$$\dot{Q}_1 = I_1$$
$$\dot{Q}_2 = I_2 \tag{4}$$

gdzie Q_1 i Q_2 oznaczają ładunki na kondensatorach odpowiednio górnym i dolnym. Różniczkując (2) po czasie i korzystając z (4) dostajemy

$$I_1 / C + R\dot{J}_1 = -\omega U_0 \sin \omega t \tag{5}$$

podobnie z (3) i (4) dostajemy

$$R\dot{J}_2 + J_2 / C = -\omega U_0 \sin \omega t$$

obydwa równania mają taką samą postać. Wystarczy więc rozwiązać jedno z nich. Szukamy rozwiązania ustalonego w poniższej postaci (elementy RC obwodu nie mogą zmienić częstości prądu zmiennego, a mogą jedynie wprowadzić przesunięcie fazowe):

$$I_1 = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{6}$$

gdzie φ jest przesunięciem fazowym. Wstawiając (6) do (5) otrzymujemy:

$$\frac{I_0}{C}\cos(\omega t + \varphi) - RI_0\omega \sin(\omega t + \varphi) = -\omega U_0 \sin \omega t$$

czyli

$$\frac{I_0}{C}\cos \omega t \cos\varphi - \frac{I_0}{C}\sin \omega t \sin\varphi - RI_0\omega \sin \omega t \cos\varphi - RI_0\omega \cos \omega t \sin\varphi = -\omega U_0 \sin \omega t.$$

Porównując współczynniki przy niezależnych funkcjach cosωt i sinωt znajdujemy:

$$\frac{I_0}{C}\cos\varphi - \omega RI_0 \sin\varphi = 0,$$
$$\frac{I_0}{C}\sin\varphi + \omega RI_0 \cos\varphi = \omega U_0.$$

Stąd

$$tg\varphi = \frac{1}{\omega RC}, I_0 = \omega C U_0 \sin\varphi.$$

Wobec tego

$$I_1 = I_2 = \omega C U_0 \sin\varphi \cos(\omega t + \varphi),$$

gdzie φ jest określone wzorem (7). Z (4) i (8) wynika, że w stanie ustalonym

$$Q_1 = CU_0 \sin\varphi \sin(\omega t + \varphi).$$

Mamy

$$U_2 = U_{24} = U_{21} - U_{41} = \frac{Q_1}{C} - RI_2 = U_0 \sin(\omega t + \varphi) - R\omega C U_0 \sin\varphi \cos(\omega t + \varphi) =$$
$$= U_0 \sin\varphi \sin(\omega t + \varphi) + ctg\,\varphi U_0 \sin\varphi \cos(\omega t + \varphi) = U_0 \sin\varphi \sin(\omega t + \varphi) -$$
$$- U_0 \cos\varphi \cos(\omega t + \varphi) = -U_0 \cos(\omega t + 2\varphi).$$

U_2 oznacza różnicę potencjałów między punktami 2 i 4. różnica potencjałów między punktami 4 i 2 miałaby oczywiście przeciwny znak. Widzimy, że napięcie U_2 jest przesunięte w fazie. Układ działa jak przesuwnik fazy.