XXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1978/1979). Stopień I, zadanie teoretyczne – T1.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Olimpiada Fizyczna XXVII – XXVIII WSiP Warszawa 1983

Autor: Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki

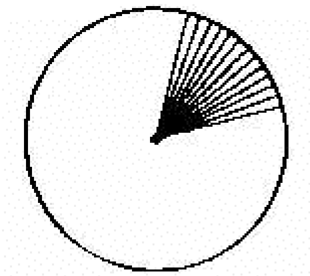
Nazwa zadania: Moment bezwładności trójkąta i koła

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: twierdzenie Steinera, moment bezwładności, jednorodny trójkąt

Zadanie teoretyczne – T1, zawody I stopnia, XXVIII OF.

Wyznacz moment bezwładności jednorodnego trójkąta o boku a, b, c i masie m względem osi prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez środek masy. Korzystając z otrzymanego wyniku, oblicz moment bezwładności jednorodnego koła o promieniu r i masie m względem osi symetrii. (Koło należy tu potraktować jako zbiór bardzo dużej liczby „trójkątów" pokazanych na rys. 1).



Rys. 1

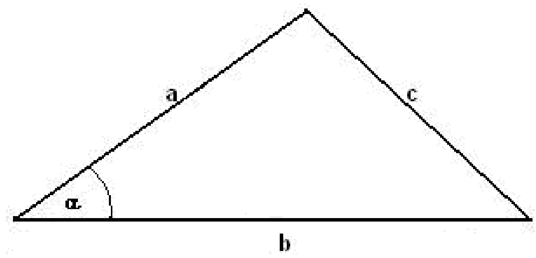
Rozwiązanie

Znajomość a, b i α całkowicie wyznacza trójkąt. Zatem moment bezwładności trójkąta względem środka masy (leżącego na przecięciu środkowym) musi mieć postać:

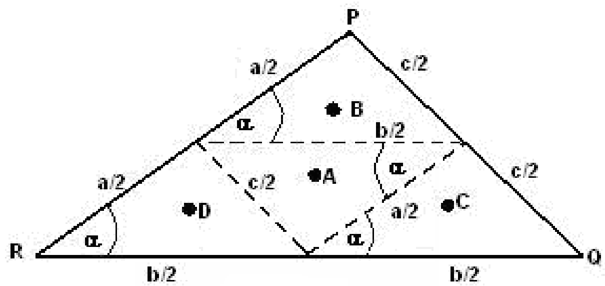
$$I = Kma^2 f(b/a, \alpha).$$

gdzie K jest nieznaną stałą, a $f(b/a, \alpha)$ – nieznaną funkcją dwu zmiennych: stosunku b/a i kąta α. Jest to najogólniejsza postać wyrażenia o wymiarze momentu bezwładności, jaką można zbudować z a, b i α (rys. 2).

Podzielimy trójkąt na mniejsze przystające wzajemnie trójkąty o dwa razy mniejszych bokach, tak jak na rysunku 3.



Rys. 2



Rys. 3

Zgodnie z twierdzeniem Steinera mamy:

$$I = 4I_1 + \frac{m}{4}AB^2 + \frac{m}{4}AC^2 + \frac{m}{4}AD^2. \qquad (1)$$

gdzie I_1 jest momentem bezwładności każdego z mniejszych trójkątów względem własnego środka masy. Mamy więc:

$$I_1 = \frac{1}{16}Kma^2 f(b/a,\alpha).$$

AB jest $1/3$ środkowej m_P wychodzącej z punktu P (punktu przecięcia środkowych dzieli je w stosunku 1:2). Podobnie $AC = \frac{1}{3}m_Q$ i $AD = \frac{1}{3}m_R$. Mamy też ze wzoru na długość środkowej trójkąta

$$m_p^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2\right) - \frac{1}{4}b^2,$$

$$m_Q^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2\right) - \frac{1}{4}a^2,$$

$$m_R^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) - \frac{1}{4}c^2.$$

Uwzględniając powyższe zależności można napisać wzór (1) w następującej postaci:

$$Kma^2 f(b/a,\alpha) = \frac{1}{4}Kma^2 f(b/a,\alpha) + \frac{m}{4}\frac{1}{12}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Stąd

$$Ka^2 f\left(b/a,\alpha\right)=\frac{1}{36}\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

zatem

$$I=\frac{1}{36}m\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Dla bardzo „wąskiego” trójkąta równobocznego o masie *dm*, kącie rozwarcia $d\alpha$ i bokach doń przyległych równych ***r***, mamy $dI'=\frac{1}{18}r^2dm$. Jest to moment bezwładności tego trójkąta względem środka masy leżącego w odległości $\frac{2}{3}r$ od wierzchołka kąta $d\alpha$. Względem osi przechodzącej przez ten wierzchołek.

$$dI=dI'+dm\left(\frac{2}{3}r\right)^2=\frac{1}{2}r^2dm$$

ale $dm=\frac{m}{2\pi}d\alpha$, gdzie *m* jest masą koła.
Wobec tego:

$$dI=\frac{1}{2}r^2m\frac{d\alpha}{2\pi}$$

Całkując od zera do 2π dostaniemy $I=\frac{1}{2}mr^2$