

XXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1978/1979). Stopień W, zadanie teoretyczne – T1-A.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej,
Olimpiada Fizyczna XXVII i XXVIII, WSiP Warszawa 1983

Autor: Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki

Nazwa zadania: Wartości skuteczne natężenia prądu

Działy: Elektryczność

Słowa kluczowe: Skuteczne natężenie prądu, obwód RLC, siła elektromotoryczna, prawo Ohma, prawo Kirchhoffa

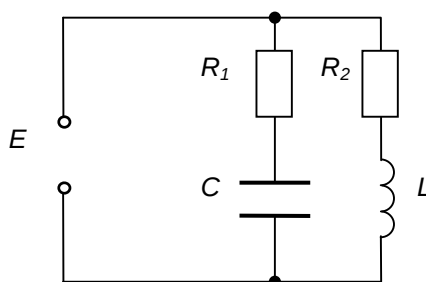
Zadanie teoretyczne – T1-A, zawody wstępne, XXVIII OF.

Dany jest obwód elektryczny składający się z kondensatora C , cewki L oraz oporów omowych R_1 i R_2 - rysunek 1.

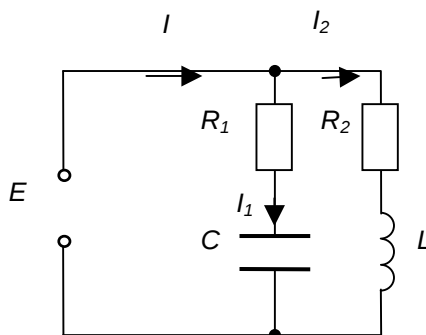
Siła elektromotoryczna zależy od czasu wg wzoru:

$$E = E_0 \cos \omega t.$$

Wyznacz zależność prądu czerpanego ze źródła od czasu. Ponadto przyjmując, że opory R_1 i R_2 są bardzo małe, znajdź warunek, jaki powinna spełniać ω , by wartość skuteczna natężenia prądu pobieranego ze źródła była najmniejsza.



Rys. 1.

Rozwiązanie

Rys. 2.

Wprowadzając oznaczenia takie jak na rysunku 2 można napisać następujące równania wyrażające prawa Ohma i Kirchhoffa:

$$I_1 + I_2 = I \quad (1)$$

$$R_1 I_1 + Q / C = E_0 \cos \omega t \quad (2)$$

$$R_2 I_2 + L dI_2 / dt = E_0 \cos \omega t \quad (3)$$

Przy czym zachodzi związek:

$$I_1 = dQ / dt. \quad (4)$$

Równanie (2) po zróźniczkowaniu obu stron po czasie można zapisać w postaci:

$$R_1 \frac{dI}{dt} + \frac{I_1}{C} = -E_0 \omega \sin \omega t. \quad (5)$$

Równania (2) i (5) można rozwiązać niezależnie. Szukamy rozwiązań harmonicznich zależących od czasu.

Przyjmujemy, że I_1 ma postać:

$$I_1 = I_{01} \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Podstawiając to do (5) dostajemy

$$-R_1 I_{01} \omega \sin(\omega t + \varphi_1) + \frac{1}{C} I_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) = -E_0 \omega \sin \omega t,$$

czyli

$$\begin{aligned} & -R_1 I_{01} \omega \sin \omega t \cos \varphi_1 - R_1 I_{01} \omega \cos \omega t \sin \varphi_1 + \\ & \frac{1}{C} I_{01} \cos \omega t \cos \varphi_1 - \frac{1}{C} I_{01} \sin \omega t \sin \varphi_1 = -E_0 \omega \sin \omega t. \end{aligned}$$

Stąd

$$-R_1 I_{01} \omega \cos \varphi_1 - \frac{1}{C} I_{01} \sin \varphi_1 = -E_0 \omega$$

$$-R_1 I_{01} \omega \sin \varphi_1 + \frac{1}{C} I_{01} \cos \varphi_1 = 0,$$

bo funkcje $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ są niezależne. Drugiego z równań dostajemy

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{\omega C R_1}. \quad (6)$$

Mając φ_1 możemy wyznaczyć I_{01} . PO krótkich rachunkach dostajemy:

$$I_{01} = \frac{E_0 \omega}{(R_1 \omega + \frac{1}{C} \operatorname{tg} \varphi_1) \cos \varphi_1} = \frac{E_0}{\sqrt{R_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

Zatem

$$I_1 = \frac{E_0}{\sqrt{R_1^2 + 1/(\omega^2 C^2)}} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

gdzie φ_1 jest dane wzorem (6).

W podobny sposób znajdujemy rozwiązanie równania (3). Otrzymujemy:

$$I_2 = \frac{E_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

przy czym

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L}{R_2} \quad (7)$$

Mając I_1 i I_2 można zapisać zależność I od czasu:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{E_0}{\sqrt{R_1^2 + 1 \div (\omega^2 C^2)}} \cos(\omega t + \varphi_1) + \frac{E_0}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

gdzie φ_1 i φ_2 są określone wzorami (6) i (7). Można to zapisać w postaci

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

gdzie

$$I_0 = \sqrt{I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$I_{02} = \frac{E_0}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_{01} \sin \varphi_1 + I_{02} \sin \varphi_2}{I_{01} \cos \varphi_1 + I_{02} \cos \varphi_2}.$$

Gdy $R_1 = R_2 = 0$:

$$I_{01} = E_0 \omega C, \quad I_{02} = E_0 / \omega L,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = +\infty, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\infty.$$

Najmniejsza wartość I wynosi 0. Zachodzi to wtedy, gdy

$$E_0 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = 0,$$

czyli gdy

$$\omega = 1/\sqrt{LC}.$$