XXVII OLIMPIADA FIZYCZNA (1977/1978). Stopień II – zadanie teoretyczne – T2

Źródło: Olimpiada Fizyczna XXVII – XXVIII, WSiP, Warszawa 1983

Autor: Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki

Nazwa zadania: Oddziaływanie grawitacyjne półkul

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: wypadkowa sił, wzajemne przyciąganie ciał, kula, stała grawitacji

Zadanie teoretyczne – T2, zawody II stopnia, XXVII OF.

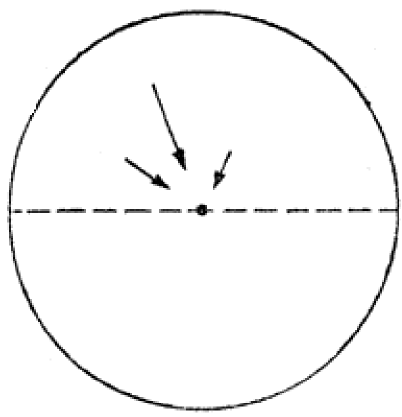
Jednorodną kulę o masie M i promieniu R rozcięto wzdłuż jednego z kół wielkich otrzymując dwie półkule stykające się płaskimi stronami. Z jaka siłą półkule te przyciągają się wzajemnie?

Rozwiązanie

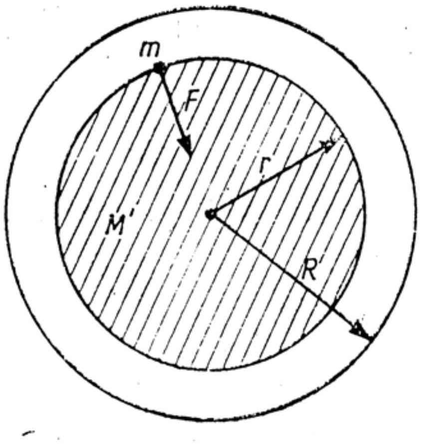
Zadanie to nawiązuje do zadania 4 z zawodów I stopnia bieżącej Olimpiady Fizycznej. Należy obliczyć wypadkową sił działających na poszczególne punkty jednej z półkul. Kilka takich sił zaznaczono na rys. 1. Są one skierowane ku środkowi kuli. Wyznaczmy te siły, a konkretnie obliczmy siłę działającą na niewielką masę m znajdującą się wewnątrz kuli w odległości $r < R$ od jej środka. Jak wiadomo na rozważaną masę m oddziałuje tylko zakreskowana część kuli – rys.2. Siła pochodząca od nie zakreskowanej części kuli jest równa zeru. Mamy więc:

$$F = \frac{k\,m\,M'}{r^2},$$

gdzie M' jest masą kuli zakreskowanej, a k stałą grawitacji.



Rys. 1.

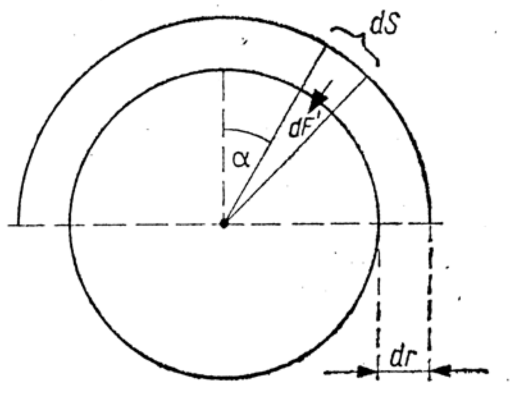


Rys. 2.

$$\frac{M'}{M} = \frac{r^3}{R^3}.$$

Zatem

$$F = \frac{kMm}{R^3} r.$$



Rys.3.

Weźmy teraz pod uwagę warstwę półkulistą o grubości dr przykrywającą kulę o promieniu r (rys. 3). Masa elementu dS jest równa $dSdr\rho$, gdzie ρ jest gęstością kuli rozważanej w zadaniu

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Mamy więc następujące wyrażenie na siłę dF' działającą na element warstwy:

$$\frac{kM}{R^3}\cdot dSdr\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

czyli

$$\frac{3k}{4\pi}\frac{M^2}{R^6}rdSdr.$$

Składowa „pionowa" tej siły (tj. prostopadła do podstawy półkuli) wynosi:

$$\frac{3k}{4\pi}\frac{M^2}{R^6}rdrdS\cos\alpha=\frac{3k}{4\pi}\frac{M^2}{R^6}rdrdS',$$

gdzie $dS'=dS\cos\alpha$ jest rzutem elementu dS na podstawę półkuli (zaznaczoną przerywaną linią poziomą). Siła „pionowa" działająca na całą powłokę półkulistą jest oczywiście równa

$$dF_{\perp}=\frac{3k}{4\pi}\frac{M^2}{R^6}rdrS,$$

gdzie S jest polem podstawy półkuli:

$$S=\pi r^2.$$

Zatem

$$dF_{\perp}=\frac{3kM^2}{4R^6}r^3dr.$$

Całkowita siła działająca na półkulę jest sumą sił działających na półkuliste warstwy, które je tworzą. Wobec tego szukana siła jest równa:

$$F_{\perp}=\int_0^R\frac{3kM^2}{4R^6}r^3dr=\frac{3kM^2}{4R^6}\frac{1}{4}R^4=\frac{3kM^2}{16R^2}.$$

Wielu zawodników próbowało rozwiązać to zadanie przy założeniu, że półkule przyciągają się tak, jakby ich masy były skupione w środkach masy. Oczywiście takie podejście nie może doprowadzić do dobrego wyniku, gdyż wspomniane założenie nie jest prawdziwe. W ogólnym przypadku nie można zastąpić oddziaływania grawitacyjnego rozciągłych ciał materialnych oddziaływaniem punktów materialnych o masach równych masie rozważanych ciał i zajmujących położenia pokrywające się ze środkami masy ciał. Jest tak tylko w kilku szczególnie prostych przypadkach, ale nie zawsze. W szczególności nie jest to słuszne dla półkul.