XXVII OLIMPIADA FIZYCZNA (1977/1978). Stopień I, zadanie teoretyczne - T4

Źródło: Olimpiada Fizyczna XXVII-XXVIII, WSiP, 1983

Autor: Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki

Nazwa zadania: Oddziaływania dwóch półsfer

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: Grawitacja, oddziaływanie, półsfera

Zadanie teoretyczne - T4, zawody I stopnia, XXVII OF.

Dana jest jednorodna, cienka powłoka kulista rozcięta wzdłuż wielkiego koła na dwie równe części. Promień powłoki jest równy r, a jej masa $-m$. Oblicz siłę, z jaką przyciągają się stykające półsfery.

Rozwiązanie

Masa powłoki jest rozmieszczona na całej sferze jednakowo symetrii wiadomo, że siła oddziaływania na każdy element powłoki jest skierowana do środka powłoki. Wartość tej siły wynosi

$$dF = \frac{1}{2} k \frac{m dm}{r^2}, \tag{1}$$

gdzie k jest stałą grawitacji, a dm jest masą elementu powłoki o powierzchni ds, ale

$$dm = \frac{m}{4\pi\, r^2} ds.$$

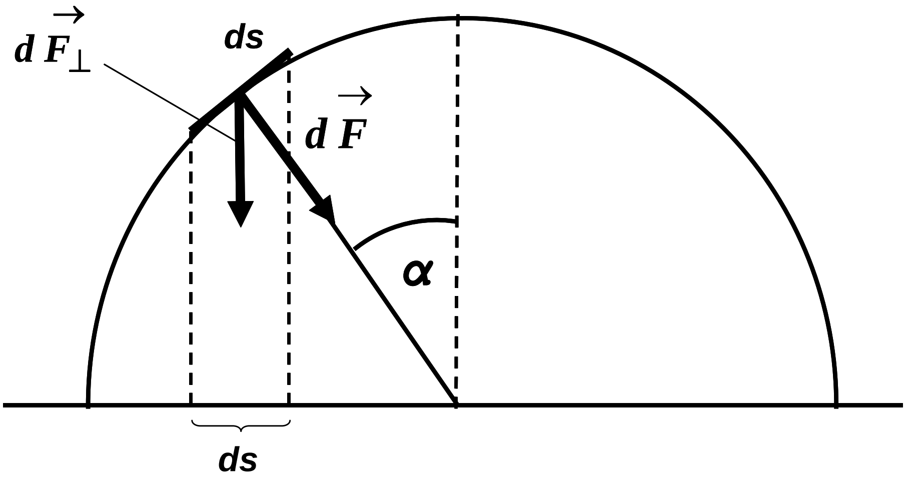
Zatem

$$dF = \frac{1}{2} km \frac{m}{4\pi\, r^2} \frac{1}{r^2} ds = \frac{k}{8\pi} \frac{m^2}{r^4} ds,$$

$$dF = \frac{k}{8\pi} \frac{m^2}{r^4} ds. \tag{2}$$

Występowanie współczynnika $\frac{1}{2}$ we wzorze(1) odnoszącym się do sfery dowodzi się taką samą metodą jak dla odpowiedniego problemu z elektrostatyki (zob. zadanie o naelektryzowanej bańce mydlanej z zawodów II stopnia XXVI Olimpiady Fizycznej).

W celu policzenia siły działającej na górną półkulę należy zsumować składowe pionowe sił $d\vec{F}$ działających na poszczególne elementy sfery ds.
Mamy (rys. 1):



Rys. 1.

$$dF = dF\cos\alpha = \frac{k}{8\pi}\frac{m^2}{r^4}ds\cos\alpha = \frac{k}{8\pi}\frac{m^2}{r^4}ds'$$

stąd

$$F_\perp = \frac{k}{8\pi}\frac{m^2}{r^4}S\,,$$

gdzie S jest polem przekroju (kołem wielkim):

$$S = \pi\, r^2.$$

Zatem

$$F = \frac{km^2}{8r^2}.$$