XXVI OLIMPIADA FIZYCZNA (1976/1977). Stopień I, zadanie teoretyczne – T2.

Źródło: Olimpiady fizyczne XXV i XXVI, WSiP Warszawa 1979

Autor: Andrzej Szymacha.

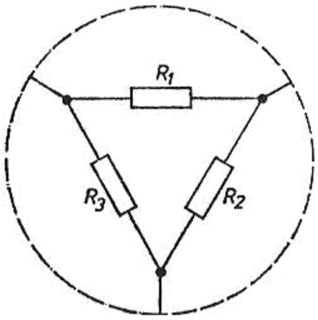
Nazwa zadania: Problemy ze skrzyżowaniami

Działy: Prąd stały

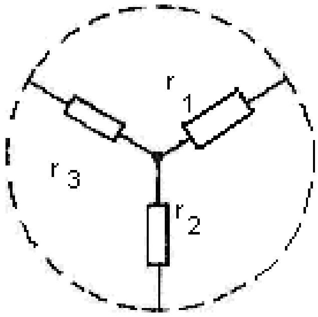
Słowa kluczowe: Napięcie, natężenie, obwód

Zadanie teoretyczne – T2, zawody I stopnia, XXVI OF.

Jaki warunek konieczny i dostateczny muszą spełniać wielkości r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3, aby fragment obwodu pokazany na rysunku 1 był równoważny fragmentowi pokazanemu: na rysunku 2, tzn., jaki warunek musi być spełniony, aby zamiana jednego fragmentu drugim w żadnym wypadku nie prowadziła do zmiany rozkładu napięć lub natężeń w obwodzie poza obszarem zaznaczonym przerywanym kółkiem ?



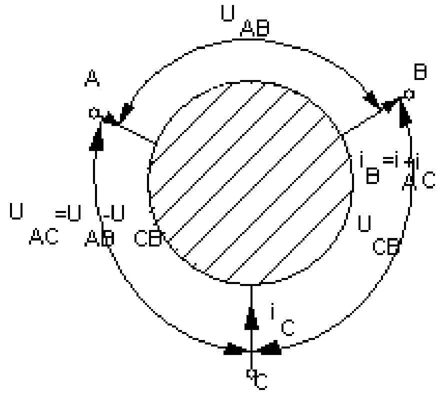
Rys. 1



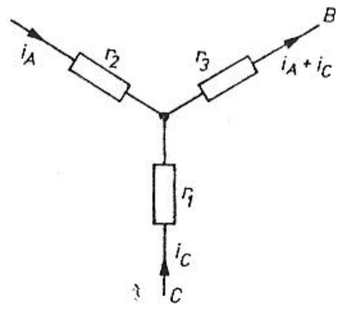
Rys. 2

Rozwiązanie

„Czarna skrzynka" z dwoma wyjściami scharakteryzowana jest w pełni związkiem między jednym napięciem a jednym natężeniem, a więc jednym oporem zastępczym. Układ z trzema końcami scharakteryzowany jest związkiem między dwoma napięciami, np. U_{AB} i U_{CB} (U_{AC} Jest już wyznaczone przez te dwa) i dwoma natężeniami i_A i i_C (i_B = i_A + i_C). Ustalmy postać tego związku dla obu układów (trójkąta i gwiazdy), a potem zbadajmy, czy i w jakich warunkach obie te zależności będą jednakowe: rys. 3.



Rys. 3



Rys. 4

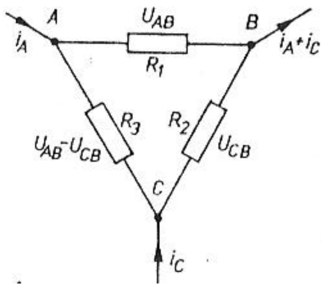
1. Dla gwiazdy: rys. 4

$$U_{AB} = i_a \cdot r_2 + (i_A + i_C) \cdot r_3 = i_A \cdot (r_2 + r_3) = i_C \cdot r_3, \tag{1}$$

$$U_{CB} = i_C \cdot r_1 + (i_A + i_C) \cdot r_3 = i_A \cdot r_3 + i_C \cdot (r_1 + r_3).$$

2. Dla trójkąta: rys. 5

3.



Rys. 5

$$i_A = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB} - U_{CB}}{R_3} = U_{AB} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - U_{CB} \cdot \frac{1}{R_3}, \tag{2}$$

$$i_C = \frac{U_{CB}}{R_2} + \frac{U_{AB} - U_{CB}}{R_3} = -\frac{1}{R_3} \cdot U_{AB} + U_{CB} \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

Rozwiązując pierwszy układ względem natężeń dostaniemy dla gwiazdy

$$i_A = U_{AB} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)} - U_{CB} \cdot \frac{r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}, \tag{3}$$

$$i_C = U_{AB} \cdot \frac{r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)} - U_{CB} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}.$$

Równość odpowiednich współczynników w układach równań dla gwiazdy i trójkąta jest warunkiem dostatecznym, by dla wszystkich możliwych napięć U_{AB} i U_{CB} prądy i_A i i_C były identyczne dla obu układów połączeń.
Łatwo sprawdzić, że jest to również warunek konieczny. Istotnie, jeśli $U_{CB} = 0$ a $U_{AB} \neq 0$, to

- dla trójkąta

$$i_A = U_{AB} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right),$$

$$i_C = -\frac{1}{R_3} \cdot U_{AB}.$$

- dla gwiazdy

$$i_A = U_{AB} \cdot \frac{r_1 + r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)},$$

$$i_C = -U_{AB} \cdot \frac{r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}.$$

Porównując odpowiednie prądy stwierdzamy, że współczynniki pierwszej kolumny w układach równań (2) i (3) są równe. Podobnie rozpatrzenie przypadku $U_{AB} = 0$ a $U_{CB} \neq 0$ prowadzi do równości pozostałych współczynników w układach równań (2) i (3).
Dowiedliśmy więc, że równość czterech współczynników zbudowanych z wielkości r_1, r_2, r_3 i R_1, R_2, R_3, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym równoważności układów oporów połączonych w trójkąt i gwiazdę.

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{r_1 + r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)},$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)},$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)},$$

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{r_2 + r_3}{r_1 r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}.$$

Powyższe równania w elementarny sposób można rozwiązać albo względem r_i wyrażonych przez R_i albo na odwrót. A oto postaci tych rozwiązań:

$$R_1 = r_2 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right), \qquad r_1 = R_2 R_3 \left(R_1 + R_2 + R_3 \right)^{-1},$$

$$R_2 = r_1 r_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right), \qquad r_2 = R_1 R_3 \left(R_1 + R_2 + R_3 \right)^{-1},$$

$$R_3 = r_1 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right), \qquad r_3 = R_1 R_2 \left(R_1 + R_2 + R_3 \right)^{-1}.$$

Warto podkreślić, że do powyższych wzorów można dojść szybko i łatwo badając pewne sytuacje szczególne (np. przykładając napięcie różne od zera tylko do jednej pary końcówek w jednym i drugim układzie połączeń); w ten sposób dowiedlibyśmy, że równania to są warunkiem koniecznym. Argument o dostateczności tych związków choć intuicyjnie dość oczywisty spowodował pewne wydłużenie dowodu. Warto dodać, że niemal wszyscy uczestnicy zawodów uzyskali powyższe związki, ale mało kto rzeczywiście udowodnił, że są to warunki dostateczne pełnej równoważności tych układów.