**XXVI OLIMPIADA FIZYCZNA (1976/1977). Stopień I, zadanie teoretyczne – T1.**

**Źródło:** Fizyka w Szkole nr 1 i 2, 1978

**Autor:** Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki

**Nazwa zadania:** Obrączka na tacy

**Działy:** Kinematyka, dynamika

**Słowa kluczowe:** prędkość kątowa, współczynnik tarcia siły hamującej, ruch postępowy, moment siły, ruch obrotowy

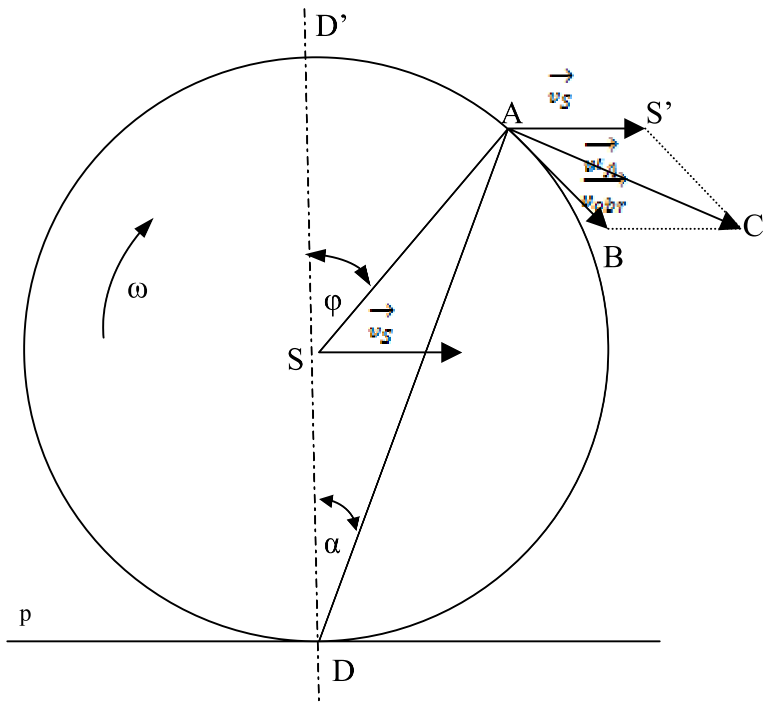
---

**Zadanie teoretyczne – T1, zawody I stopnia, XXVI OF.**

Na poziomy stół położono cienki jednorodny pierścień o masie m i promieniu r. Pierścień ten obraca się wokół własnej osi symetrii z prędkością kątową $\omega$. Jednocześnie środek pierścienia porusza się z prędkością $v$. Współczynnik tarcia pierścienia o stół wynosi $f$. Wyznacz wartość siły $F$ hamującej ruch postępowy pierścienia oraz wartość momentu siły $M$ hamującego jego ruch obrotowy w chwili, gdy spełniony jest związek $v = \omega r$.

**Rozwiązanie**

Obliczmy prędkość względem stołu dowolnie wybranego punktu A (rys. 1) pierścienia, w sytuacji, gdy prędkość. Obrotowa i liniowa spełniają związek $v = \omega r$. Szukana prędkość jest sumą geometryczną prędkości




Rys. 1

ruchu obrotowego wokół środka pierścienia $\overrightarrow{v_{obr}}$ i prędkości ruchu postępowego środka $\overrightarrow{v_s}$ . Z założenia zadania prędkości te są równe, co do wartości bezwzględnej.

Zaznaczmy punkt pierścienia, którego wektor wodzący $\overrightarrow{SD}$ jest prostopadły do $\overrightarrow{v_s}$. Łatwo dowiedziemy, że wektor prędkości wypadkowej punktu A, $\overrightarrow{v_A}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{DA}$.

D o w ó d: Wektor $\overrightarrow{SD}$ jest prostopadły do $\overrightarrow{v_s}$, a wektor $\overrightarrow{SA}$ do wektora $\overrightarrow{v_{obr}}$. Zatem kąt między wektorami $\overrightarrow{v_s}$ i $\overrightarrow{v_{obr}}$, jest równy kątowi $\varphi$

$$\angle BAB' = \varphi.$$

Dzięki temu, że $|\overrightarrow{v_s}| = |\overrightarrow{v_{obr}}|$ trójkąt ABC jest równoramienny, równoległobok wektorów $\overrightarrow{v_s}$ i $\overrightarrow{v_{obr}}$ jest rombem, a kąt BAC $=\frac{\varphi}{2}$. Ale trójkąt ASD jest też równoramienny, zatem z twierdzenia o kącie zewnętrznym $\varphi = 2\angle SAD$. Zachodzi więc równość:

$$\angle SAD = \angle BAC = \frac{\varphi}{2}.$$

Co oznacza, że kąt $\angle DAC = \angle SAB = 90°$. Nietrudno już dowiedziemy, że długość wektora $\overrightarrow{v_A}$, jest równa $\omega\,|\overrightarrow{DA}|$. Istotnie, trójkąty DSA i ABC są podobne (oba równoramienne, a kąty przy podstawie są w każdym z nich równe $\frac{\varphi}{2} = \alpha$). Zatem

$$\left|\frac{\overrightarrow{v_A}}{\overrightarrow{v_s}}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{SA}}\right|.$$

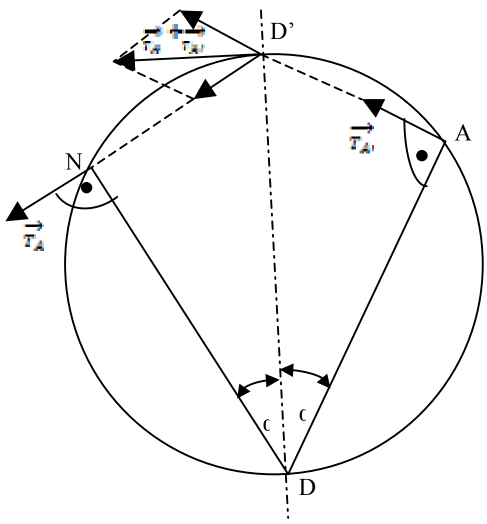
Czyli :

$$\left|\overrightarrow{v_A}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{v_s}}{\overrightarrow{SA}}\right|\left|\overrightarrow{DA}\right| = \omega\,|\overrightarrow{DA}|$$

Widać więc, że ruch złożony pierścienia można interpretować również jako czysty obrót z prędkością kątową $\omega$ ,ale obrót nie wokół środka S, lecz wokół punktu D. Kinematyczne własności tego ruchu są identyczne jak przy toczeniu pierścienia bez poślizgu po prostej p. Proponujemy czytelnikowi udowodnić, że każdy ruch figury płaskiej poruszającej się w ustalonej płaszczyźnie można w danej chwili interpretować jako czysty obrót wokół pewnego punktu D. Dla naszego pierścienia znajduje się w każdej chwili na obwodzie pierścienia.

Dla celów naszego zadania ważne jest tylko to że prędkość $\left|\overrightarrow{v_A}\right|$ jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{DA}$. Jej wartość jest nieistotna gdyż siła tarcia działająca na dany fragment pierścienia, oznaczający punkt A ma kierunek przeciwny do przeciwny do kierunku prędkości tarcia i ciężaru tego fragmentu pierścienia (Rys.2). Oznaczamy kąt pod jakim widać pomyślany fragment ze środka koła (w mierze łukowej) symbolem $\Delta\varphi$, a masę pierścienia $m$. Wartość siły tarcia działającej na ten element wynosi :

$$\left|\overrightarrow{T_A}\right| = f(mg\,\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\,) \tag{1}$$




Rys. 2

Ustaliliśmy już, że:

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} \tag{2}$$

Zatem

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2} \tag{3}$$

Jest kątem pod jakim widać rozpatrywany fragment z punktu D. W celu obliczenia siły wypadkowej musimy zsumować siły $T_A$ dla wszystkich fragmentów ,na jakie w myśli możemy podzielić cały pierścień. Wygodnie jest najpierw dodać do siebie siły tarcia od dwóch takich fragmentów położonych symetrycznie (rys.2). Mając na uwadze dalsze obliczanie momentu siły zastosujemy sposób geometrycznego dodawania wektorów siły, przy którym równocześnie znajduje się taki jej punkt przyłożenia ,by siła wypadkowa przyłożona w tym punkcie dawała taki sam moment siły jak siły składane. Polega on na przesuwaniu sił wzdłuż linii ich działania. Ponieważ $\overrightarrow{T_A}$ jest prostopadłe do $\overrightarrow{DA}$, to ze znanych własności okręgu wynika, że przedłużenie linii działania wektora $\overrightarrow{T_A}$ przejdzie przez punkt D'. Zatem wypadkową każdej dowolnej pary fragmentów A i A' należy przyłożyć w punkcie D' i skierować antyrównolegle do $\overrightarrow{v_s}$.

Kąt, jaki każdy z wektorów $\overrightarrow{T_A}$ i $\overrightarrow{T_{A'}}$, tworzy z osią równoległą do $\overrightarrow{v_s}$ wynosi α, zatem

$$\left|\overrightarrow{T_A} + \overrightarrow{T_{A'}}\right| = 2\, f\, m\, g \frac{2\Delta\alpha}{2\pi} cos\,\alpha \tag{4}$$

Ponieważ wszystkie siły $(\overrightarrow{T_A} + \overrightarrow{T_{A'}})$ są skierowane równolegle i przyłożone w tym samym punkcie D', obliczenie siły wypadkowej sprowadza się do zsumowania wartości $\left|\overrightarrow{T_A} + \overrightarrow{T_{A'}}\right|$.

Punkt przyłożenia tej siły wypadkowej będzie tym samym punktem D'.

Ostatecznie

$$\mathrm{T}_{\text{całkowite}} = \left( -\frac{\overrightarrow{v_S}}{v_S} \right) 2 f m g \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\alpha \, d\alpha = -\frac{2}{\pi} f m g \frac{\overrightarrow{v_s}}{v_s} \tag{5}$$

Moment tej siły względem środka S wynosi

$$\mathrm{M} = \left| \vec{T} \right| r = \frac{2}{\pi} f m g r \,.$$