XXVI OLIMPIADA FIZYCZNA (1976/1977). Stopień wstępny, zad. teoretyczne – T1-C.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Andrzej Szymacha: Olimpiady Fizyczne XXV i XXVI, WSiP, Warszawa, 1979.

Nazwa zadania: Promień gwiazdy, przy którym staje się ona czarną dziurą.

Działy: Astrofizyka, grawitacja.

Słowa kluczowe: Gwiazda, czarna dziura, Einstein, zasada zachowania, energia, foton, częstość światła, promień Schwarzschilda, kolaps, prędkość ucieczki.

Zadanie teoretyczne – T1, podpunkt C, zawody stopnia wstępnego, XXVI OF.

Jednym z najciekawszych obiektów kosmicznych są czarne dziury stanowiące ostatnią fazę ewolucji niektórych typów gwiazd. Wszystko wskazuje na to, że czarne dziury rzeczywiście istnieją, a nie są tylko hipotezą uczonych. Przypuszcza się, że gwiazda określonego typu może stać się czarną dziurą wtedy, gdy jej promień zmniejszy się na, tyle że światło emitowane z jej powierzchni nie będzie miało dostatecznej energii, by ją opuścić i oddalić się nieskończenie daleko. Ścisły opis czarnych dziur wymaga posługiwania się bardzo skomplikowanym aparatem matematycznym i pojęciowym teorii grawitacji Einsteina. Niektóre jednak problemy z niezłym przybliżeniem; (przynajmniej, co do rzędu wielkości) można rozwiązać korzystając z zasad zachowania. Fotonowi o częstości ν przypisuje się wtedy masę

$$h\nu/c^2 ,$$

gdzie h oznacza stałą Plancka, a c jest prędkością światła.

Wyobraźmy sobie gwiazdę w postaci jednorodnej kuli o masie M. Korzystając z podanych wyżej informacji wyznacz promień graniczny tej gwiazdy R, przy którym stałaby się ona czarną dziurą. Wyznacz liczbową wartość R dla Słońca, gdyby podlegało ono ewolucji prowadzącej do powstania czarnej dziury. Odpowiednie dane liczbowe znajdź w tablicach.

Rozwiązanie

Obliczmy zgodnie z podanymi wskazówkami zmianę częstości światła wysłanego z odległości r od środka gwiazdy ($r > R$) do nieskończoności. Skorzystamy z wzoru na energię potencjalną ciała o masie m w polu grawitacyjnym gwiazdy

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \qquad \text{gdzie } (r > R). \tag{1}$$

Przy przemieszczeniu fotonu z odległości r do ∞ prawo zachowania energii daje nam związek:

$$h\nu(r) - \frac{GM}{r}\frac{h\nu(r)}{c^2} = h\nu(\infty), \tag{2}$$

$$\nu(\infty) = \nu(r)\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right). \tag{3}$$

Jeżeli promień gwiazdy

$$R > \frac{GM}{c^2},$$

to foton wysłany nawet z samej powierzchni osiągnie nieskończoność z jakąś częścią $\nu(\infty) > 0$. Jeżeli

$$R < \frac{GM}{c^2},$$

to dla promienia wysłanego z odległości początkowej

$$R \le r < \frac{GM}{c^2},$$

wzór (3) traci sens (częstość nie może być ujemna) – foton „spadnie” z powrotem na gwiazdę, tak jak piłka wyrzucona do góry ręką dziecka.
Ostatecznie warunkiem na czarną dziurę jest nierówność

$$R \le \frac{GM}{c^2}. \tag{4}$$

Podobny warunek otrzymujemy, że znacznie prostszych rozważań. Nad problemem tym zastanawiał się już Laplace. Stosując mianowicie prawo zachowania energii do ciała o stałej masie łatwo otrzymamy wzór na II prędkość kosmiczną, zwaną inaczej prędkością ucieczki z danego ciała niebieskiego

$$\frac{m\upsilon_\infty^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{GMm}{R},$$

$$\upsilon_\infty^2 = \upsilon^2 - \frac{2GM}{R}. \tag{5}$$

Warunkiem ucieczki jest oczywiście żądanie, by $\upsilon_\infty^2 > 0$. (W przeciwnym wypadku ciało zatrzyma się w skończonej odległości od "centrum" siły i zacznie spadać):

$$\upsilon^2 - \frac{2GM}{R} \ge 0,$$

$$\upsilon > \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \upsilon_{\mathrm{II}}. \tag{6}$$

Najniższa możliwa prędkość, jaką należy ciału nadać na powierzchni gwiazdy, by uleciało ono do nieskończoności, to właśnie owa druga prędkość kosmiczna.

Jeżeli druga prędkość kosmiczna jest większa od prędkości światła, to gdyby światło składało się ze zwykłych cząstek podlegających prawom mechaniki klasycznej, nie mogłoby ono opuścić jej powierzchni. Gwiazda, nawet bardzo gorąca obserwowana z dużej odległości byłaby czarna. Warunkiem na istnienie czarnej dziury, jaki otrzymuje się w ten sposób, jest

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} > c, \tag{7}$$

czyli

$$R \le \frac{2GM}{c^2}. \tag{8}$$

Dostajemy wynik podobny do nierówności (4), ale z dodatkowym czynnikiem 2. Wynika to stąd, że oba przytoczone rozumowania są bardzo przybliżone korzystamy, bowiem w nich z klasycznych wyobrażeń, iż pole grawitacyjne może być poprawnie opisane z pomocą pojęcia potencjału nawet, jeśli jego natężenie jest bardzo duże. W rzeczywistości w teorii grawitacji Einsteina pojęcie potencjału w ogóle nie występuje. Pole grawitacyjne jest tam przypisane krzywiźnie czasoprzestrzeni, jednak i tam gęstość materii odpowiadająca upakowaniu masy M wewnątrz kuli o promieniu danym wzorem (8) prowadzi do tak dużej krzywizny, że zmieniają się zasadniczo topologiczne własności czasoprzestrzeni. Dzieli się ona na dwie części, przy czym cząstka materii, która znalazła się „we wnętrzu" – nawet światło – nie może żadną miarą wydostać się „na zewnątrz".

Do obliczeń wartości numerycznej wynikającej z wzoru (4) najwygodniej jest wyrazić iloczyn GM przez charakterystyki orbity Ziemi (w przybliżeniu orbity kołowej)

$$\frac{m_Z \upsilon^2}{r_Z} = \frac{GMm}{r_Z^2}, \tag{9}$$

stąd

$$GM = \upsilon^2 r_Z = \left(\frac{2\pi r_Z}{T}\right)^2 r_Z = \frac{4\pi^2 r_Z^3}{T^2},$$

gdzie r_Z – odległość Ziemi od Słońca = 150000000 km, T = 1 rok.

Ostatecznie

$$R \leq \frac{4\pi^2 r_Z^3}{T^2 c^2}.$$

Czas 1 roku wyrażony w sekundach wynosi w przybliżeniu $\pi \cdot 10^7$ sekund, stąd

$$R_{\mathrm{gr}} = \frac{4\cdot\left(15\cdot 10^7\right)^3}{10^{14}\cdot 9\cdot 10^{10}}\ \mathrm{km} = 1{,}5\ \mathrm{km}.$$

Słońce stałoby się, zatem czarną dziurą, gdyby zostało ściśnięte do objętości kuli o fantastycznie małym (jak na warunki astronomiczne) promieniu 1,5 km. Ponieważ faktyczny promień słońca wynosi ~700000 km, jego gęstość przy takim ściskaniu musiałaby wzrosnąć około 10^{17} razy! Zauważmy, że w normalnych warunkach na Ziemi (a średnia gęstość materii na Słońcu nie odbiega zanadto od tych warunków) atomy w fazie skondensowanej mając promienie $\sim 10^{-8}$ cm stykają się ze sobą. Gdyby je ścisnąć tak, że zaczęłyby się stykać ze sobą jądra atomowe ($r \sim 10^{-13}$), gęstość wzrosłaby o czynnik 10^{15}. Ściskając takie stykające się jądra do objętości jeszcze o czynnik 100 razy mniejszy, dostalibyśmy gęstość, do jakiej trzeba by sprasować Słońce, aby otrzymać czarną dziurę.

Na zakończenie obliczmy średnią gęstość czarnej dziury w zależności od jej całkowitej masy:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3c^6}{4\pi G^3}\frac{1}{M^2}. \tag{10}$$

Dla masy Słońca dostaliśmy bardzo dużą gęstość. Według obecnych teorii astrofizycznych siły grawitacyjne ściskające Słońce nie mogą sprężyć go do tej gęstości (nawet gdyby ono całkowicie wystygło). Jednakże dla gwiazd o większej masie wzór (10) mówi, że wymagana gęstość jest mniejsza i dlatego odpowiednio masywne gwiazdy mogą osiągnąć (i osiągają) stan czarnej dziury.