

XXVI OLIMPIADA FIZYCZNA (1976/1977). Stopień wstępny, zad. teoretyczne – T1-B.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Andrzej Szymacha: Olimpiady Fizyczne XXV i XXVI, WSiP, Warszawa, 1979.

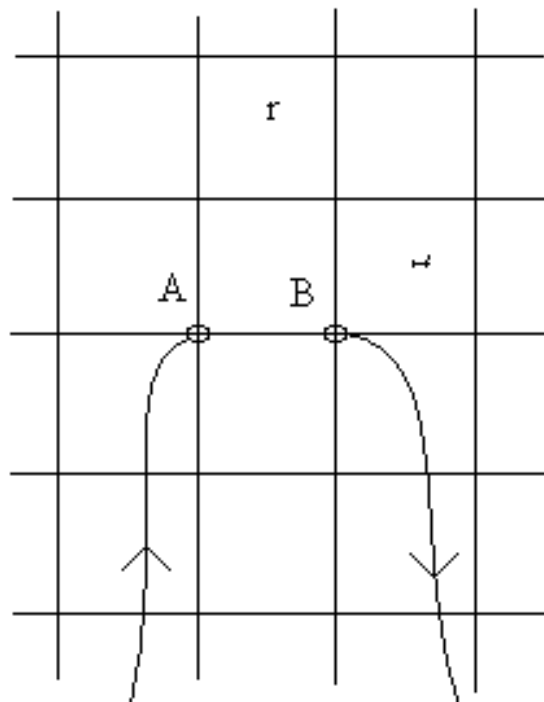
Nazwa zadania: Opór zastępczy sieci przy ustalonych punktach obwodu elektrycznego.

Działy: Elektryczność.

Słowa kluczowe: Oczko, węzeł obwodu elektrycznego, sieć, opór zastępczy, potencjał, prawo Ohma, prawa Kirchhoffa.

Zadanie teoretyczne – T1, podpunkt B, stopień wstępny, XXVI OF.

Dana jest nieskończona, płaska sieć druciana o oczkach kwadratowych (rys. 1.). Opór każdego prostoliniowego odcinka drutu łączącego dwa najbliższe węzły wynosi r . Wyznacz opór zastępczy R_{AB} sieci w przypadku, gdybyśmy ją włączyli do obwodu w punktach A i B .



Rys.1.

Rozwiązanie

Wyobraźmy sobie, że do punktu A wpływa prąd o natężeniu I rozpluwający się po całej sieci i wypływający z niej gdzieś bardzo daleko (w nieskończoność). Ze względu na symetrię problemu w tej sytuacji w każdym odcinku drutu przylegającym do punktu A popłynie prąd

$$\frac{1}{4} I r.$$

Spadek potencjału między punktem A i B wyniesie zgodnie z prawem Ohma

$$\frac{1}{4}Ir.$$

Inną możliwą sytuacją dla tej sieci jest przypadek, gdy prąd dopływa do sieci gdzieś z bardzo daleka i wypływa z punktu B . Niech natężenie tego prądu znów wyniesie I . W tej nowej sytuacji odcinkiem AB znów płynie prąd

$$\frac{1}{4}Ir,$$

w tę samą stronę, co poprzednio, a więc od A do B , a spadek napięcia wynosi znów

$$\frac{1}{4}Ir$$

i ma ten sam znak, co w przypadku poprzednim.

W teorii obwodów z oporami spełniającymi prawo Ohma jest spełniona swoista zasada superpozycji. Mówi ona, że jeżeli dla danej sieci przy napięciach na różnych elementach U_1, U_2, \dots , płyną przez różne przewodniki prądy I_1, I_2, \dots , a przy napięciach U'_1, U'_2, \dots płyną prądy I'_1, I'_2, \dots , to przy napięciach na analogicznych przewodnikach wynoszących odpowiednio:

$$U_1 + U'_1, U_2 + U'_2, \dots \text{ itd.},$$

płyną prądy

$$I_1 + I'_1, I_2 + I'_2, \dots \text{ itd.}$$

Zasada ta jest niemal oczywista. Jej formalne uzasadnienie możemy podać z faktu, że prądy przy danych napięciach wyznacza się z równań liniowych wyrażających treść praw Kirchhoffa. Jeśli te same równania spełnione są raz przez wartości U_1, U_2, \dots i I_1, I_2, \dots , a innym razem przez $U'_1, U'_2, \dots, I'_1, I'_2, \dots$, to dodając parami te same równania dostaniemy znów te same równania z wartościami prądów i napięć będących sumami wielkości primowanych i nieprimowanych.

Zasada superpozycji zastosowana do naszego przykładu mówi nam, że jeśli złożymy obie rozpatrzone sytuacje szczególne, to dostaniemy nową sytuację zgodną z prawami elektryczności, w której do przewodu A wpływa prąd I , przewodem B wypływa prąd I , a napięcie na odcinku AB wynosi

$$U_{AB} = \frac{1}{4}Ir + \frac{1}{4}Ir - \frac{1}{2}Ir.$$

Zgodnie z określeniem oporu zastępczego

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I},$$

dostajemy

$$R_{AB} = \frac{1}{2}r.$$

Jednocześnie w tej nowej sytuacji prąd dopływający z nieskończoności jest równy zeru ($I + (-I)$). Można dowieść również, że prąd w każdym oczku dostatecznie odległym od punktów A i B szybko spada do zera, gdy odległość rośnie do nieskończoności. Oznacza to, że rola tych odległych oczek staje się coraz mniej ważna, a otrzymany rezultat możemy w niezłym przybliżeniu zastosować do sieci skończonej, byleby tylko punkty A i B nie były wybrane zbyt blisko brzegu.