XXVI OLIMPIADA FIZYCZNA (1976/1977). Stopień wstępny, zad. teoretyczne – T1-A.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Andrzej Szymacha: Olimpiady Fizyczne XXV i XXVI, WSiP,Warszawa, 1979.

Nazwa zadania: Warunki równowagi obracającego się wahadła matematycznego.

Działy: Drgania i fale mechaniczne.

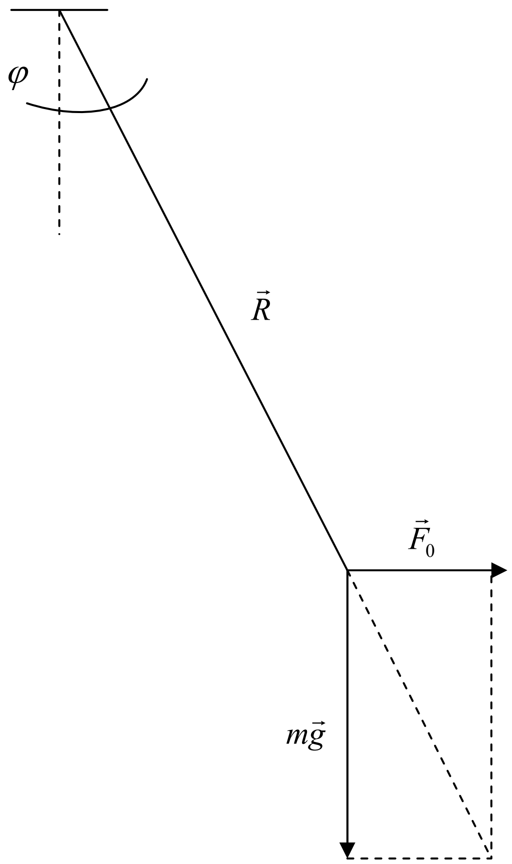
Słowa kluczowe: Wahadło stożkowe, równowaga trwała, chwiejna, obojętna, siła Coriolisa, siła odśrodkowa, moment siły.

Zadanie teoretyczne – T1, podpunkt A, stopień wstępny, XXVI OF.

Dane jest wahadło matematyczne o długości l mogące wahać się w płaszczyźnie pionowej obracającej się wokół punktu zaczepienia ze stałą prędkością kątową ω. Wyznacz położenie równowagi takiego wahadła. Zbadaj rodzaj równowagi (trwała, chwiejna, obojętna).

Rozwiązanie

Zadanie wygodnie jest rozwiązać w układzie odniesienia związanym z wirującą płaszczyzną.



Rys. 1.

Wymaga to dodania do sił rzeczywistych sił bezwładności, tj. siły odśrodkowej i siły Coriolisa. Siła Coriolisa działa na ciało tylko wtedy, gdy jego prędkość (w nie inercjalnym układzie odniesienia) jest różna od zera. Badanie położenia równowagi w tym układzie jest zagadnieniem statycznym, w którym interesuje nas równowaga sił działających na ciało w spoczynku, zatem siły Coriolisa są nieistotne. Zadanie sprowadza się tym samym do znalezienia położenia równowagi wahadła matematycznego, na które działa siła ciężkości mg i siła odśrodkowa F_Q (rys. 1.) o wartości bezwzględnej równej $m\omega^2 l \sin\varphi$ i siła reakcji R nici, lub pręta za pomocą, którego jest zrealizowane wahadło. Warunkiem równowagi jest znikanie sumy tych sił:

$$mg + R + F_0 = 0 \tag{1}$$

Z równania (1) wynika po pierwsze, że kierunek wypadkowej sił mg i F_0 musi mieć kierunek pręta, tzn.

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\dfrac{m\omega^2}{\sin\varphi}}{mg}. \tag{2}$$

lub po przekształceniu

$$\sin\varphi\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\omega^2 l}{g}\right) = 0. \tag{3}$$

Równanie to, niezależnie od ω ma rozwiązanie

$$\sin\varphi = 0, \tag{4}$$

co odpowiada $\varphi = 0$ lub $\varphi = 180°$.

Rozwiązanie odpowiadające znikaniu nawiasu w równaniu (3) przedyskutujemy w dalszej kolejności.

Jest jasne, że $\varphi = 180°$ może być w ogóle położeniem jakiejkolwiek równowagi, tylko wtedy, gdy wahadło jest zrealizowane za pomocą pręta, a nie nici. W tym pierwszym przypadku będzie to położenie równowagi chwiejnej, co jest niemal oczywiste. Wychylając wahadło dowolnie mało od tego położenia powodujemy pojawienie się sił odsuwających ciało jeszcze dalej od górnego wierzchołka (rys. 2.)

W położeniu na rysunku 2 i 3 siła odśrodkowa stara się obrócić wahadło jeszcze bardziej w prawo, to samo dotyczy siły ciężkości.

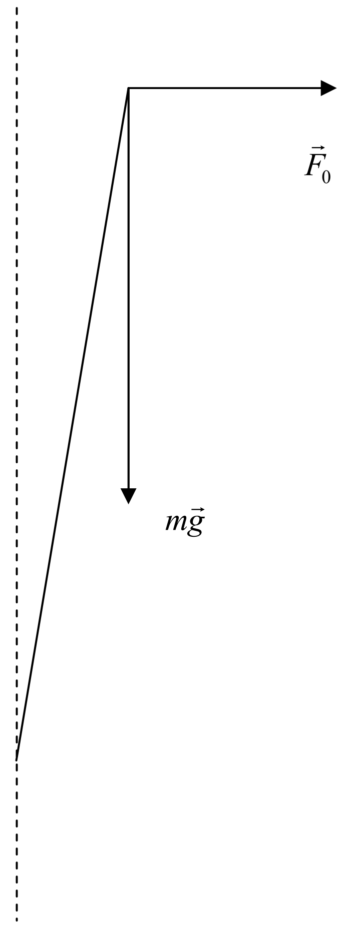
Położeniem równowagi trwałej może być natomiast rozwiązanie $\varphi = 0$. Dość nieoczekiwane w tym zadaniu jest to, że położenie najniższe $\varphi = 0$ nie zawsze jest położeniem równowagi trwałej, to znaczy nie dla wszystkich ω).

Sporządźmy rysunek analogiczny do rysunku 2, ale przedstawiający nasze wahadło nieznacznie wychylone z położenia równowagi u dołu (rys. 3.). W tym położeniu tendencje sił mg i F_0 są przeciwne. Siła ciężkości stara się sprowadzić ciało z powrotem do położenia równowagi, a siła, odśrodkowa stara się ciało odsunąć od tego położenia. O tym czy równowaga jest trwała, czy chwiejna decyduje, który z czynników przeważy. Porównajmy zatem momenty tych sił. Warunkiem równowagi trwałej jest żądanie, by moment siły ciężkości był większy, co do wartości od momentu siły odśrodkowej, dla każdego kąta $\varphi \neq 0$. Z rysunku odczytujemy, że ramieniem siły ciężkości jest $l\sin\varphi$), a ramieniem siły odśrodkowej $l\cos\varphi$:

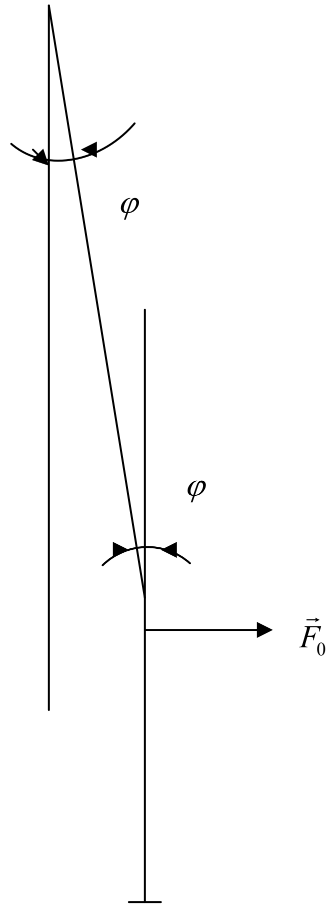
$$m\,g\,h\,l\sin\varphi > \left(m\omega^2 l\sin\varphi\right)\cos\varphi \quad \text{(warunek równowagi trwałej)}, \tag{5}$$

czyli po uproszczeniu

$$\cos\varphi < \frac{g}{\omega^2 l}. \tag{6}$$



Rys.2.



Rys.3.

Warunek (6) będzie spełniony dla wszystkich kątów różnych od zera, jeśli

$$\frac{g}{\omega^2 l} \geq 1, \tag{7}$$

co można przepisać też w postaci

$$\omega \leq \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T_0}. \tag{8}$$

Gdzie T_0 jest okresem wahań swobodnego wahadła matematycznego o długości l. Położenie najniższe, jest położeniem równowagi trwałej, jedynie dla niezbyt szybkiego ruchu obrotowego.

Powstaje pytanie, co dzieje się z wahadłem, gdy płaszczyzna z naszego zadania obraca się szybciej niż to wynika z warunku (8). Jak w tym wypadku ustawi się wahadło po wygaśnięciu ewentualnych drgań? Położenie równowagi chwiejnej jest przecież z fizycznego punktu widzenia niedopuszczalne. Odpowiedź jest jasna. Jeśli spełniony jest warunek przeciwny do (7) tzn., jeśli

$$\frac{g}{\omega^2 l} < 1,$$

to równanie (3) na położenie równowagi ma jeszcze jedno rozwiązanie, a mianowicie

$$\cos\varphi_0 = \frac{g}{\omega^2 l}. \tag{9}$$

Z fizycznego punktu widzenia jest niemal oczywiste, że położenie to (jeśli tylko istnieje, tzn. jeśli $\frac{g}{\omega^2 l} < 1$) jest zawsze położeniem równowagi trwałej. Bardziej formalny dowód możemy oprzeć – podobnie jak w przypadku położenia $\varphi = 0$ – na badaniu momentów siły ciężkości i odśrodkowej.

Warunek trwałości równowagi w położeniu

$$\varphi_0 = \arccos\frac{g}{\omega^2 l}. \tag{10}$$

jest następujący:
dla $\varphi > \varphi_0$ |Moment siły ciężkości| > |Moment siły odśrodkowej|,
dla $\varphi < \varphi_0$ |Moment siły ciężkości| < |Moment siły odśrodkowej|, czyli

$$mgl\sin\varphi > \frac{m\omega^2}{l\sin\varphi\cos\varphi} \qquad \text{dla } \varphi > \varphi_0,$$

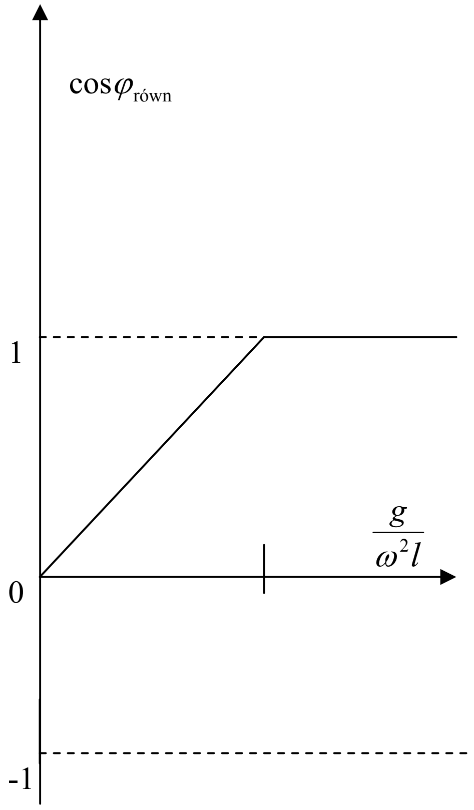
$$mgl\sin\varphi < \frac{m\omega^2}{l\sin\varphi\cos\varphi} \qquad \text{dla } \varphi < \varphi_0. \tag{11}$$

lub po przekształceniu

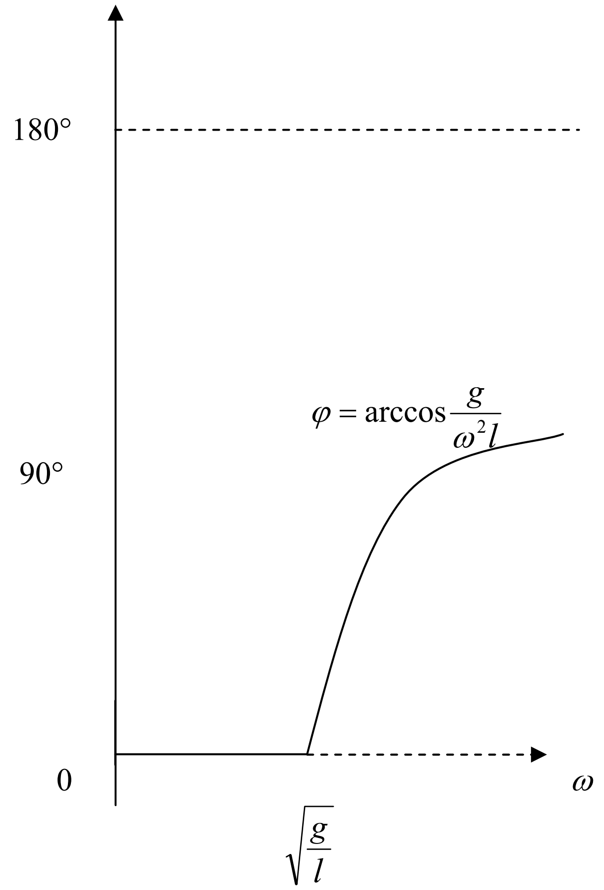
$$\cos\varphi_0 > \cos\varphi \qquad \text{dla } \varphi > \varphi_0,$$

$$\cos\varphi_0 > \cos\varphi \qquad \text{dla } \varphi < \varphi_0. \tag{12}$$

Ale $\cos\varphi$ jest funkcją malejącą w interesującym nas przedziale $0 \le \varphi \le 180°$, nierówności (12) są, zatem na pewno spełnione. Wyniki przeprowadzonej analizy możemy przedstawić na wykresie podającym zależność położenia równowagi od wartości $\frac{g}{\omega^2 l}$ (rys. 4a.) lub na wykresie podającym zależność $\varphi_{równ}$ od ω (rys. 4b).



Tylko dla pręta



Równowaga trwała
Równowaga chwiejna

Rys.4a. Rys.4b.