

XXV OLIMPIADA FIZYCZNA (1975/1976). Etap II, zadanie teoretyczne – T1

Źródło: Fizyka w Szkole nr 1, 1977

Autor: Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki

Nazwa zadania: Pierścienie

Działy: Dynamika

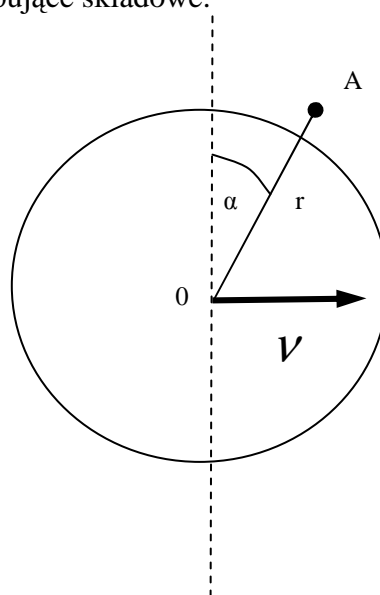
Słowa kluczowe: prędkość ciała, współczynnik tarcia, siła hamująca, ruch postępowy, moment siły

Zadanie teoretyczne – T1, zawody II stopnia, XXV OF.

Na poziomy stół położono cienki jednorodny pierścień o masie m i promieniu r . Pierścień ten obraca się wokół własnej osi symetrii z prędkością kątową ω . Jednocześnie środek pierścienia porusza się z prędkością v . Współczynnik tarcia pierścienia o stół wynosi f . Wyznacz wartość siły F hamującej ruch postępowy pierścienia oraz wartość momentu siły M hamującego jego ruch obrotowy w chwili, gdy spełniony jest związek $v = \omega r$.

Rozwiązanie

Prędkość v punktu A o współrzędnej kątowej α (pokazanej na rys. 1), liczona względem nieruchomego stołu, ma następujące składowe:



Rys. 1

$$v_H = V + \omega r \cos \alpha \quad (\text{składowa równoległa do } V)$$

$$v_{\perp} = \omega r \sin \alpha \quad (\text{składowa prostopadła do } V)$$

Ponieważ z założenia, w chwili początkowej zachodzi związek $v = \omega r$, więc możemy napisać że:

$$v_H = 2\omega r \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$v_{\perp} = 2\omega r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Wartość liczbowa prędkości v wynosi:

$$v = \sqrt{v_H^2 + v_{\perp}^2} = 2\omega r \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|$$

W każdym punkcie pierścienia działa siła tarcia zwrócona przeciwnie do prędkości v tego punktu względem stołu. Siła tarcia dT działająca na element pierścienia zawarty między kątami α i $\alpha + d\alpha$ ma dwie składowe o wartościach:

$$dT_H = fg \cdot dm \cdot \frac{v_H}{v}$$

$$dT_{\perp} = fg \cdot dm \cdot \frac{v_{\perp}}{v}$$

gdzie $dm = \rho da$ i gdzie ρ oznacza „gęstość kątową” pierścienia, czyli masę pierścienia przypadającą na jednostkowy kąt α (w mierze łukowej). Masa całego pierścienia spełnia warunek:

$$2\Pi \rho = m.$$

Stąd

$$\rho = \frac{m}{2\Pi}$$

i

$$dm = \frac{m}{2\Pi} d\alpha$$

Obliczymy T_H . Należy w tym celu scałkować dT_H po kącie α od 0 do 2Π . Mamy:

$$T_H = \int_0^{2\Pi} fg \frac{m}{2\Pi} d\alpha \frac{2\omega r \cos 2\frac{\alpha}{2}}{2\omega r \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} = 2 \int_0^{\Pi} g \frac{m}{2\Pi} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{2}{\Pi} fmg$$

Składowa $T_{\perp} = 0$, co można wykazać bez całkowania tak jak w rozwiązaniu zadania po krążku z zawodów II stopnia XXIII Olimpiady Fizycznej („Fizyka w szkole” nr 6, rok 1974, strona 31). Tak więc szukana siła hamująca ruch postępowy krążka wynosi

$$F = T_H = \frac{2}{\Pi} fmg.$$

Moment hamujący najlepiej policzyć względem środka pierścienia (ale można i względem innych punktów, np. względem chwilowej osi obrotu; ważne jest, by zdawać sobie sprawę względem jakiego punktu jest liczony). Ramiona sił dT_{\perp} i dT_H w punkcie A względem środka pierścienia wynoszą odpowiednio

$$R_1 = r \cos \alpha \text{ i } R_2 = r \sin \alpha.$$

Zatem

$$dM = R_1 dT_H + R_2 dT_{\perp} = r \cos \alpha f g \frac{m}{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} d\alpha + r \sin \alpha f g \frac{m}{2\pi} \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} d\alpha =$$

$$= r f g \frac{m}{2\pi} \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} (\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}) d\alpha = r f g \frac{m}{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} d\alpha$$

Moment hamujący ruch obrotowy krążka otrzymujemy, całkując dM po kącie α od 0 do 2π . Otrzymujemy przy tym tę samą całkę co poprzednio z dodatkowym współczynnikiem r :

$$M = \int_0^{2\pi} dM = r \frac{2}{\pi} f m g .$$

Zauważymy, że wielkości F i M spełniają związek

$$M = Fr.$$

Biorąc pod uwagę, że moment bezwładności pierścienia wynosi $I = mr^2$, można wykazać, że związek $v = \omega r$, słuszny na początku, będzie spełniony cały czas. Oznacza to, że chwilowa oś obrotu będzie poruszać się ruchem prostoliniowym równoległe do prostej, wzdłuż której porusza się środek pierścienia. Czas trwania ruchu pozostawiamy do obliczenia czytelnikowi. Błędy popełniane przez uczniów miały taki sam charakter, jak błędy omawiane przy zadaniu z krążkiem w cytowanym już artykule w „Fizyka w szkole”.

Proponowana punktacja (usuń jeśli brak punktacji)

- | | |
|--|--------|
| 1. prawidłowe wyprowadzenie wzorów na składowe prędkości v | 1 pkt. |
| 2. prawidłowe postawienie problemu siły tarcia (jedna siła tarcia przeciwnie skierowana do prędkości danego punktu względem podłoża) | 4 pkt. |
| 3. wyznaczenie T_{\perp} i T_H | 2 pkt. |
| 4. wyznaczenie M | 3 pkt. |

Błędy popełniane przez uczniów miały taki sam charakter, jak błędy omawiane przy zadaniu z krążkiem w cytowanym już artykule w „Fizyka w szkole”.

Źródło:
ze zbiorów Pracowni Dydaktyki Fizyki i Astronomii Uniwersytetu Szczecińskiego