XXIV OLIMPIADA FIZYCZNA (1974/1975). Etap II, zadanie teoretyczne – T2.

Źródło: Olimpiady Fizyczne XXIII i XXIV, WSiP, 1977

Autor: Waldemar Gorzkowski

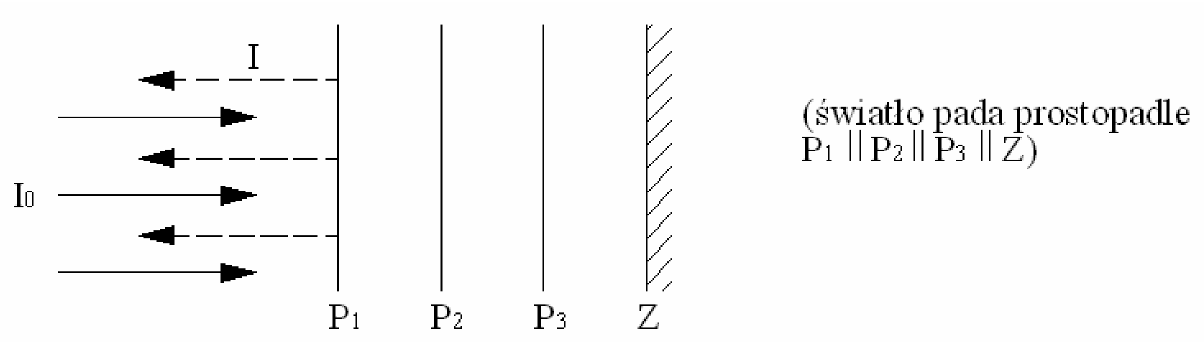
Nazwa zadania: Układ polaryzatorów

Działy: Optyka

Słowa kluczowe: Polaryzator, układ polaryzatorów, polaryzacja liniowa, płaszczyzna przepuszczania, wiązka światła niespolaryzowanego, natężenie światła spolaryzowanego

Zadanie teoretyczne – T2, zawody II stopnia, XXIV OF.

Dany jest układ optyczny:



Z oznacza zwierciadło, a P_1, P_2 i P_3 – trzy polaryzatory. Polaryzatory P_1 i P_3 są ustawione tak, że ich płaszczyzny przepuszczania są wzajemnie prostopadłe. Na układ ten puszczamy wiązkę światła niespolaryzowanego o natężeniu I_0.

1) Wyznacz największe możliwe natężenia wiązki odbitej od układu (I). Jakiemu ustawieniu płaszczyzny przepuszczanie polaryzatora P_2 ono odpowiada?

2) Czy stosunek I do I_0 można by zwiększyć (i do jakiej granicznej wartości) wstawiając zamiast polaryzatora P_2 układ dowolnie wielu polaryzatorów?

Zakładamy, że polaryzatory są doskonałe, tzn., że nie odbijają światła oraz że światło spolaryzowane w płaszczyźnie przepuszczania przepuszczają całkowicie, a światło spolaryzowane w płaszczyźnie prostopadłej zupełnie pochłaniają.

Rozwiązanie

Po przejściu przez polaryzator P_1 światło będzie spolaryzowane liniowo, a jego natężenie I_1 będzie równe $\frac{1}{2} I_0$.

Niech płaszczyzna przepuszczania polaryzatora P_2 tworzy kąt β z płaszczyzną przepuszczania polaryzatora P_1. Po przejściu przez P_2 światło będzie miało natężenie

$$I_2 = I_1 \cos^2 \beta,$$

zaś po przejściu przez polaryzator P_3 natężenie światła będzie równe

$$I_3 = I_2 \cos^2(90^0 - \beta) = I_2 \sin^2 \beta .$$

Po odbiciu od zwierciadło światło padnie znów na polaryzator P_3 będąc spolaryzowane w jego płaszczyźnie przepuszczania i przejdzie bez zmiany natężenia. Po ponownym przejściu przez polaryzator P_2 natężenie światła wyniesie

$$I_4 = I_3 \cos^2(90^0 - \beta) = I_3 \sin^2 \beta ,$$

zaś po ponownym przejściu przez polaryzator P_1 natężenie światła będzie równe

$$I_5 = I_4 \cos^2 \beta .$$

Zatem ostatecznie

$$I_5 = \frac{1}{32} I_0 \sin^4 2\beta .$$

Szukane natężenie I jest równe maksymalnej wartości I_5 i wynosi oczywiście $\frac{1}{32}$ I_0. Wartość ta zostanie osiągnięta wtedy, gdy płaszczyzna przepuszczania polaryzatora P_2 tworzy kąt 45^0 z płaszczyznami przepuszczania polaryzatorów P_1 i P_3 (wartość sin2β wynosi wtedy 1).

Przejdźmy teraz do drugiej części zadania. Wstawmy między P_1 i P_3 układ polaryzatorów $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ (n>1). Niech płaszczyzny przepuszczania kolejnych polaryzatorów układu $P_1, Q_1, \ldots Q_{n-1}$, P_3 będą przesunięte o kąt $\beta = \frac{1}{2}\frac{\pi}{n}$.

Natężenie końcowe wiązki będzie teraz wynosiło

$$I_k = \frac{1}{2} \cos^{4n}\left(\frac{\frac{1}{2}\pi}{n}\right) I_0 .$$

Przy n dążącym do nieskończoności wielkość ta dąży do $\frac{1}{2} I_0 > I = \frac{1}{32} I_0$.

Dowód przejścia granicznego jest następujący:

a) najpierw zauważmy, że

$$1 \geq \cos\alpha \geq 1 - \frac{\alpha^2}{2} ,$$

b) wiadomo, że $(1-x)^n \geq 1 - nx$ (nierówność Bernouilliego),

c) zatem

$$1 \geq \left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^{4n} \geq \left(1 - \frac{\pi^2}{8n^2}\right)^{4n} \geq \left(1 - \frac{\pi^2}{2n}\right)_{n\to\infty} \to 1 ,$$

co oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^{4n} = 1\,.$$

Tak więc

$$\lim_{n\to\infty} I_k = \frac{1}{2} I_0 \lim\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^{4n} = \frac{1}{2} I_0\,.$$

Proponowana punktacja

Podczas sprawdzania rozwiązań za pełną odpowiedź na pytanie 1 przyznawano 6 punktów, a za pełną odpowiedź na pytanie 2 – 4 punkty.