XXIV OLIMPIADA FIZYCZNA (1974/1975). Stopień III, zdanie teoretyczne – T2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski:
1) Olimpiady Fizyczne XXIII i XXIV. WSiP, Warszawa 1977
3) 25 lat Olimiad Fizycznych. WSiP, Warszawa 1979
2) Zbiór zadań z olimpiad fizycznych. Zad. rachunkowe wraz z rozwiązaniami. Wyd. 2 zmienione. WSiP, Warszawa 1987

Nazwa zadania: Bieg promienia świetlnego po paraboli

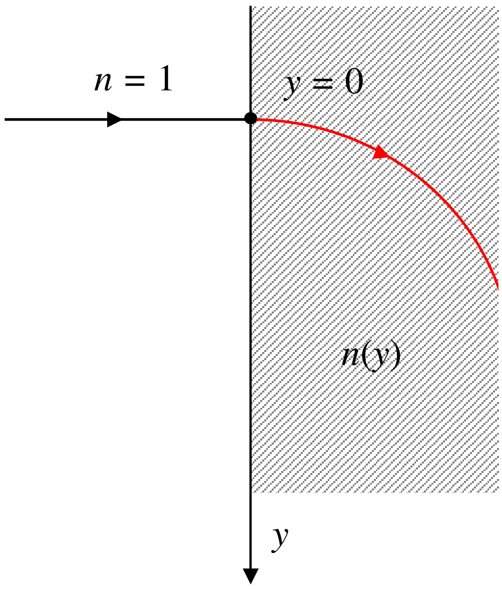
Działy: Optyka

Słowa kluczowe: światło, załamanie, prawo Snella, zasada Fermata, Huyghensa, ośrodek przezroczysty, krzywoliniowe rozchodzenie, bieg promienia, współczynnik, parabola

Zadanie teoretyczne – T2, zawody III stopnia, XXIV OF

Na ośrodek przezroczysty o współczynniku załamania zależnym od zmiennej y, w punkcie $y = 0$, pod kątem prostym pada promień światła (rys.1).

Jaka powinna być postać funkcji $n(y)$, aby wewnątrz rozpatrywanego ośrodka promień biegł po paraboli? Wartość $n(0)$ jest równa n_0.



Rys. 1

Rozwiązanie

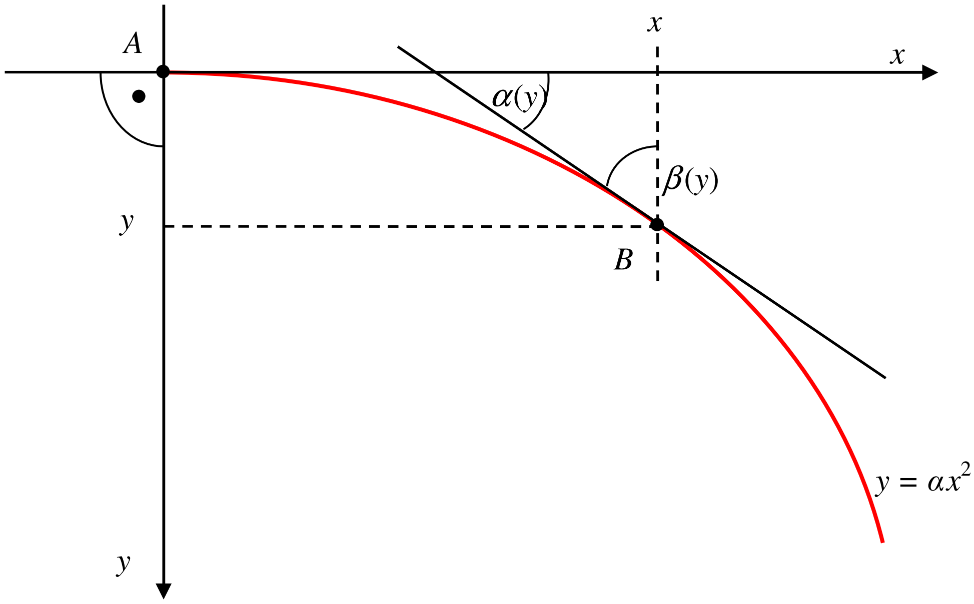
Zadanie to nawiązuje do zadania o płytce (http://www.of.szc.pl/pdf/7OF0T3_roz277.pdf) z VII Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej, która odbyła się w Warszawie w 1974 r. i warto się z nim zapoznać przed przystąpieniem do czytania niniejszego rozwiązania.

W rozwiązaniu zadania o płytce zostało udowodnione, że jeżeli promień światła biegnie przez ośrodek o współczynniku załamania zależnym tylko od jednej zmiennej, to

$$n(y)\sin\beta(y) = const\ ,$$

$\beta(y)$ oznacza tu kąt, jaki tworzy promień z kierunkiem osi y. Przyjęliśmy tu, że zmienną od której zależy n jest y.

Wprowadziliśmy układ współrzędnych tak, jak na rys. 2. Zauważmy, że parabola w punkcie $x = 0$ musi być styczna do osi x.



Rys. 2

Jej równanie możemy napisać w postaci

$$y = ax^2,$$

gdzie a jest stałą charakteryzującą „rozwartość" paraboli.
Korzystając z zależności, którą podaliśmy wyżej, możemy napisać (punkty A i B):

$$n(y)\sin\beta(y) = n(0)\sin\beta(0),$$

ale

$$\sin\beta(0) = \sin 90^0 = 1, \text{ a } n(0) = n_0$$

a więc

$$\sin\beta(y) = \frac{n_0}{n(y)}.$$

Zauważmy, że tangens kąta nachylenia stycznej w punkcie β jest równy pochodnej funkcji $y = ax^2$:

$$\operatorname{tg}\alpha(y) = 2ax = 2a\sqrt{\frac{y}{a}} = 2\sqrt{ay}.$$

Mając tg $\alpha(y)$, czyli ctg $\beta(y)$ możemy wyznaczyć sin $\beta(y)$ w sposób inny niż poprzednio:

$$\sin\beta(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\beta(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+4ay}}.$$

Wobec tego:

$$\frac{n_0}{n(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+4ay}}$$

i

$$n(y) = n_0\sqrt{1+4ay},$$

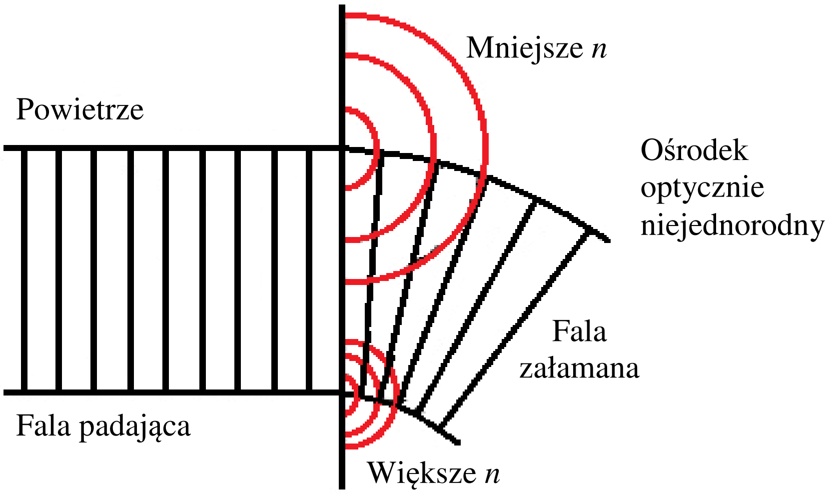
co kończy nasze rozważania.

Zadanie powyższe może się wydać nieco paradoksalne. Mogłoby się bowiem wydawać, że promień padający nie pobiegnie po torze zakrzywionym, lecz prosto wzdłuż osi *x*. Warto więc temu się przyjrzeć.

Otóż mówiąc o promieniach świetlnych z reguły mamy na myśli wąskie wiązki światła, które z niezłym przybliżeniem można traktować jako wycinki fali płaskiej. Niech fala taka pada prostopadle na ośrodek optycznie niejednorodny tak, jak to pokazano na rys. 3.

Fale wtórne w różnych obszarach rozchodzą się z różnymi prędkościami. Tam gdzie *n* jest mniejsze, tam szybciej i odwrotnie. Jak widać, czoło fali załamanej, będące obwiednią czół fal wtórnych (zasada Huyghensa), musi ulec pochyleniu.

Promienie rozpatrywane w optyce geometrycznej stanowią pewną idealizację, której w ścisłym znaczeniu nie ma w przyrodzie. Dlatego w razie jakichkolwiek wątpliwości trzeba wyobrazić sobie promień jako wycinek fali płaskiej o szerokości znacznie większej niż długość fali i zobaczyć, jak dane zjawisko przebiega zgodnie z optyką falową. Dowcipnie ujmuje to Feynmann mówiąc, że promień w optyce geometrycznej wprawdzie porusza się po określonej linii, ale tak jak piesek obwąchuje otoczenie.



Rys. 3