XXIV OLIMPIADA FIZYCZNA (1974/1975). Stopień II, zadanie teoretyczne – T1.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej,
Olimpiady Fizyczne XXIII i XXIV, WSiP, Warszawa 1977

Autor: Waldemar Gorzkowski

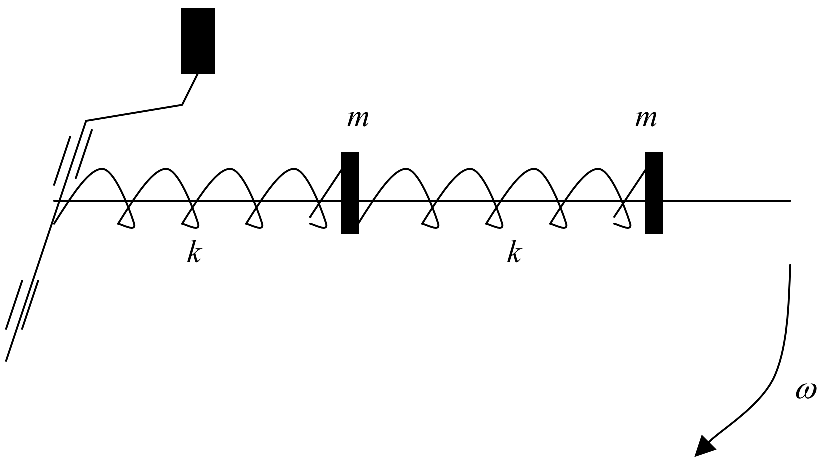
Nazwa zadania: Układ dwóch doskonałych nieważkich sprężynek

Działy: Mechanika

Słowa kluczowe: Układ dwóch doskonałych nieważkich sprężynek, stałe sprężystości, minimalna praca, prędkość kątowa

Zadanie teoretyczne – T1, zawody II stopnia, XXIV OF.

Dany jest następujący układ dwóch doskonałych nieważkich sprężynek o długościach w stanie nienapiętym równych l_0 i stałych sprężystości równych k oraz dwóch małych jednakowych ciężarków o masach m nanizanych na cienki, gładki i nieważki pręt:



Rys. 1

Układ ten może obracać się wokół osi pionowej, prostopadłej do kierunku pręta.

1) Jaką minimalną pracę należy wykonać, aby rozkręcić układ od prędkości kątowej $\omega_0 = 0$ do prędkości ω przy założeniu, że w obu przypadkach układ jest w stanie równowagi?
2) Czy prędkość ω z poprzedniego pytania może mieć dowolne wartości?

Rozwiązanie

Niech l_1 i l_2 oznaczają długość sprężynek w stanie równowagi przy prędkości kątowej układu równej ω. Wskaźnik 1 odnosi się do sprężynki bliższej osi obrotu, a wskaźnik 2 do sprężynki zewnętrznej.

Ponieważ w stanie równowagi musi działać siła dośrodkowa równa $m\omega^2 l_1$.

Siłą dośrodkową działającą na ciężarek zewnętrzny jest siła sprężystości sprężynki zewnętrznej. Zatem

$$k(l_2 - l_0) = m\omega^2 (l_1 + l_2)\ .$$

Natomiast siłą dośrodkową działającą na ciężarek bliższy osi jest wypadkowa sił, z jakimi na ten ciężarek działają obie sprężynki. Mamy więc:

$$k(l_1 - l_0) - k(l_2 - l_0) = m\omega^2 l_1\ .$$

Otrzymaliśmy dwa równania, z których możemy wyznaczyć l_1 i l_2. Po krótkich przekształceniach otrzymujemy

$$l_1 = l_0 \frac{1}{x^2 - 3x + 1},$$

$$l_2 = l_0 \frac{1 - x}{x^2 - 3x + 1} = (1 - x) l_1,$$

gdzie $x = m\omega^2 / k$.

Dla $\omega_0 = 0$ stanowi równowagi odpowiada $l_1 = l_2 = l_0$, zgodnie z treścią zadania.

Zauważmy, że w otrzymanych wyrażeniach na l_1 i l_2 mianownik może być równy zeru. Wartościami x, przy których to się zdarza, są

$$x_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2},\ x_1 < x_2\ .$$

Widzimy więc, że jeżeli x będzie się zmieniać od zera do wartości x_1, to l_1 i l_2 będą zmieniać się od l_0 do nieskończoności. Nietrudno sprawdzić, że w rozpatrywanym przedziale zarówno l_1 jak i l_2 zależą od x w sposób monotoniczny. (Pochodne $l_1(x)$ i $l_2(x)$ w przedziale $(0,\ x_1)$ są dodatnie).

Ze względu na dążenie l_1 i l_2 do nieskończoności w miarę zmieniania wartości x od zera do x_1, sens fizyczny mają tylko te wartości ω, dla których $x < x_1$, czyli te wartości ω, które spełniają związek

$$\omega < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}(\sqrt{5} - 1).$$

Czytelnik bez trudu może sprawdzić, że dla $x > x_1$ co najmniej jedna z wielkości l_1 lub l_2 ma wartość ujemną, co nie odpowiada sytuacji opisanej w zadaniu i co potwierdza podany wyżej wniosek dotyczący dopuszczalnych wartości ω.

A teraz wyznaczamy minimalną pracę potrzebną do rozkręcenia układu od prędkości $\omega_0 = 0$ do prędkości ω. W tym celu obliczamy energię całkowitą układu na początku i na końcu.

Energia całkowita dla $\omega_0 = 0$, równa sumie energii kinetycznej ciężarków i energii potencjalnej związanej z napięciem sprężynek, jest równa zeru, bo ciężarki się nie poruszają, a sprężynki nie są napięte.

Energia kinetyczna ciężarków, gdy układ obraca się z prędkością ω, wynosi

$$E_k = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m (l_1 + l_2)^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 [l_1 + (l_1 + l_2)^2].$$

Natomiast energia potencjalna napiętych sprężynek wynosi w tym wypadku

$$E_p = \frac{1}{2} k (l_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2} k (l_2 - l_0)^2 .$$

Energia całkowita układu przy prędkości ω wynosi więc

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 [l_2^1 + (l_1 + l_2)^2] + \frac{1}{2} k [(l_1 - l_0)^2 + (l_2 - l_0)^2].$$

Korzystając ze związku

$$l_2 = (1 - x) l_1 = l_0 \frac{1 - x}{x^2 - 3x + 1},$$

gdzie $x = m\omega^2 / k$, po odpowiednich przekształceniach algebraicznych otrzymujemy

$$E = \frac{1}{2} k l_0^2 \frac{x(2x^3 - 9x^2 + 9x + 5)}{(x^2 - 3x + 1)^2} .$$

Praca którą należy wykonać, nie może być mniejsza niż różnica energii końcowej i początkowej. Ponieważ całkowita energia początkowa była równa zeru, więc szukana praca minimalna musi być równa E. Zwróćmy uwagę, że praca ta przy zbliżaniu się do granicznej wartości ω, czyli gdy x dąży do x_1, dąży do nieskończoności

Proponowana punktacja

Podczas sprawdzania rozwiązań stosowano następujące kryteria

1. Wyznaczenie l_1 i l_2 do 5 pkt.
2. Wyznaczenie pracy do 3 pkt.
3. Wyznaczenie granicznej wartości ω oraz dyskusja do 2 pkt.