XXIV OLIMPIADA FIZYCZNA (1974/1975). Stopień III, zadanie teoretyczne – T1.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
W. Gorzkowski: Olimpiady Fizyczne XXIII i XXIV, WSiP, Warszawa 1977.

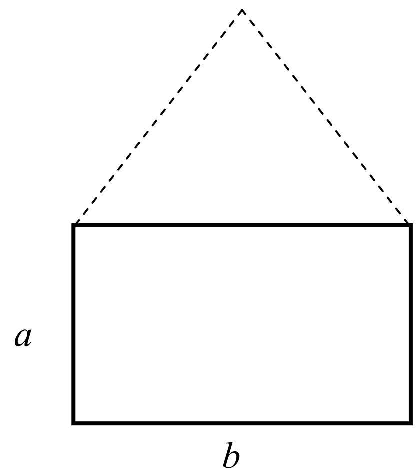
Nazwa zadania: Warunki równowagi obrazka zawieszonego na nitkach

Działy: Statyka

Słowa kluczowe: równowaga trwała, moment bezwładności bryły, środek ciężkości ciała, moment siły, stopnie swobody, punkt zaczepienia.

Zadanie teoretyczne – T1, zawody III stopnia, XXIV OF.

Do rogów jednorodnego, prostokątnego obrazka o bokach a i b przymocowano końce nici. Jaka musi być długość nici l, aby obrazek ten można było zawiesić na gwoździu wbitym w pionową ścianę w pozycji pokazanej na rysunku 1.

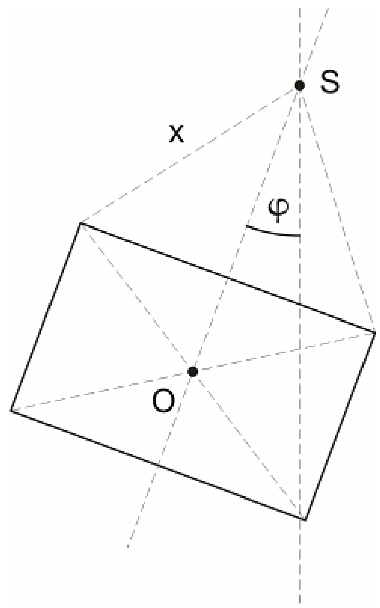


Rys. 1

Uwaga: Obrazek ma wisieć w równowadze trwałej. Tarcie zaniedbujemy.

Rozwiązanie

Jasne jest, że przy każdej długości nitki położenie pokazane na rysunku 1 jest położeniem równowagi. Praktyczne znaczenie może mieć jednak tylko równowaga trwała, bowiem tylko taką równowagę można zrealizować. Cechą charakterystyczną równowagi trwałej jest to, że przy niewielkim wychyleniu układu z badanego położenia pojawiają się siły działające tak, by układ wrócił do stanu, w którym był poprzednio.
Układ nasz ma dwa stopnie swobody. Oznacza to, że do pełnego opisu położenia obrazka potrzebne są dwa niezależne parametry. Można je wybrać następująco: jako jeden z parametrów wybierzmy kąt φ pokazany na rysunku 2, a jako drugi — odległość x gwoździka od lewego brzegu ramki. Jest rzeczą oczywistą, że w położeniu równowagi trwałej wartość kąta φ musi być równa zeru. W położeniu, dla którego $\varphi = 0$ na obrazek działa niezerowy moment siły względem punktu S. Moment ten jest równy momentowi siły ciężkości, bo momenty sił działających w punktach zaczepienia nitki do rogów obrazka (napięcia nitki) są równe zeru.

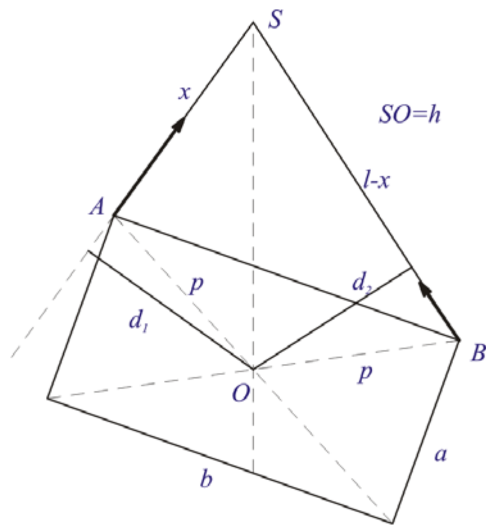


Rys. 2

Nietrudno zauważyć, że moment siły ciężkości działa tak, by środek ciężkości obrazka sprowadzić na prostą pionową przechodzącą przez punkt *S,* czyli tak, by sprowadzić kąt φ do zera.

Wystarczy zatem rozpatrzyć tylko takie położenia obrazka, dla których $\varphi = 0$. Jest to duże uproszczenie, gdyż zamiast dwóch stopni swobody mamy teraz tylko jeden.

Weźmy pod uwagę obrazek w położeniu pokazanym na rysunku 3. Na rogi obrazka działają siły napięcia nici. Siły te są równe co do wartości bezwzględnej i działają w kierunku nitek. Momenty tych sił względem: punktu *O* są różne co do znaku, a także co do wartości ze względu na różne długości ramion. Na obrazek względem punktu *O* musi więc działać pewien moment wypadkowy. Należy zbadać, czy będzie on działał w kierunku zwiększenia czy zmniejszenia wychylenia obrazka od pozycji symetrycznej względem *OS.*



Rys. 3

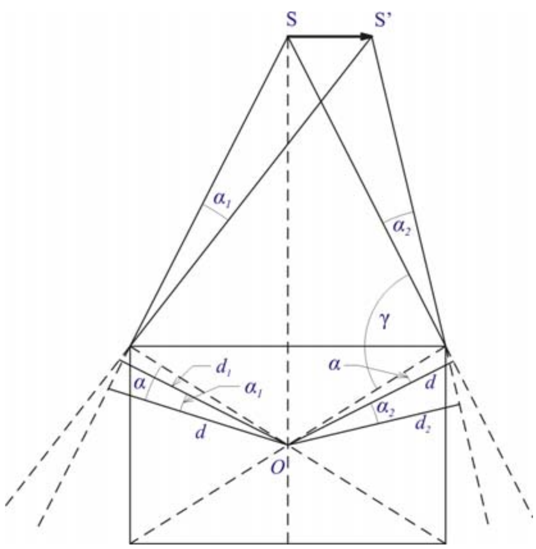
$$P = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

kąt $ASB = \gamma$, kąt $AOB = \alpha$

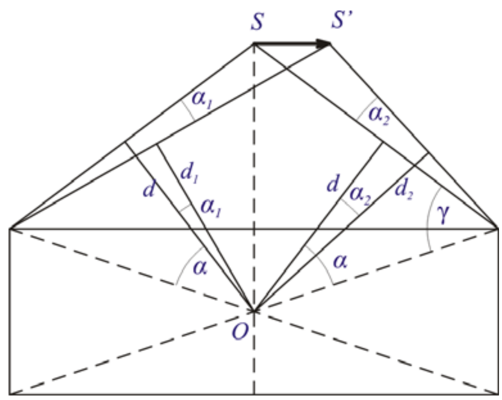
Jasne jest, że ze względu na równość sił, o tym który moment będzie większy, a więc o tym w którą stronę będzie działał moment wypadkowy, decyduje wielkość ramion d_1 i d_2. Widzimy więc, że cały problem sprowadza się do zbadania zmian długości ramion d_1 i d_2 przy obracaniu obrazka lub, co na jedno wychodzi do zbadania długości ramion d_1 i d_2 przy przesunięciach punktu zaczepienia nitki (bez zmiany jej długości) tak, jak na rysunku 4. W sytuacji pokazanej na rysunku po przesunięciu punktu zaczepienia w prawo musi pojawić się wypadkowy moment siły dążący do obrócenia obrazka zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Oznacza to, że d_1 powinno być większe niż d_2. Zbadajmy kiedy to będzie możliwe.

Rozpatrzmy trzy przypadki – jeden, gdy kąt γ pokazany na rysunku 4 jest rozwarty, drugi – gdy kąt ten jest ostry, a trzeci, gdy $\gamma = \pi/2$.

W pierwszym przypadku po niewielkim wychyleniu układu z położenia symetrycznego w zaznaczonym kierunku wartość kąta a między ramieniem d_1 a przekątną zawsze zmniejsza się, co oznacza że $d_1 > d$. Natomiast wartość kąta α między ramieniem d_2 a przekątną zawsze zwiększa się wskutek czego $d_2 < d$. Zatem $d_1 > d_2$.Widzimy więc, że dla $\gamma = \pi/2$ symetryczne położenie obrazka jest położeniem równowagi trwałej.



Rys. 4



Rys. 5

Drugi przypadek, tj. gdy γ jest kątem ostrym, zilustrowano na rysunku 5. W tym przypadku przy zaznaczonym niewielkim wychyleniu układu z położenia symetrycznego kąt α po lewej stronie zwiększa się o α_1, a kąt α po prawej stronie zmniejsza się o α_2. W rezultacie $d_1 < d_2$. Wynika stąd, że gdy γ jest kątem ostrym symetryczne zawieszenie obrazka nie może być położeniem równowagi trwałej.

Przypadek trzeci, gdy $\gamma = \pi/2$, pokazano na rysunku 6. W tym przypadku istotne jest porównanie kątów α_1 i α_2.

Oznaczając długość lewej części nitki przez $\frac{l}{2} + q$, a prawej przez $\frac{l}{2} - q$,

gdzie q małą wielkością charakteryzującą wychylenie, możemy napisać

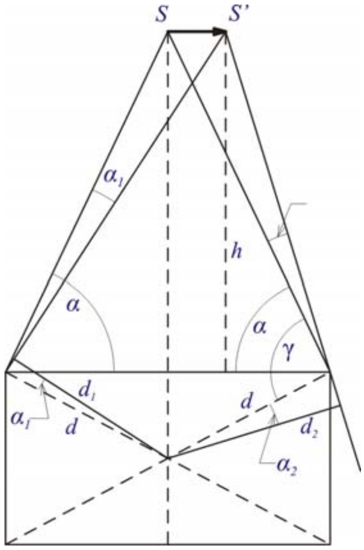
$$\frac{h}{\frac{1}{2}l + q} = \sin(\alpha - \alpha_1)$$

$$\frac{h}{\frac{1}{2}l - q} = \sin(\alpha + \alpha_1)$$

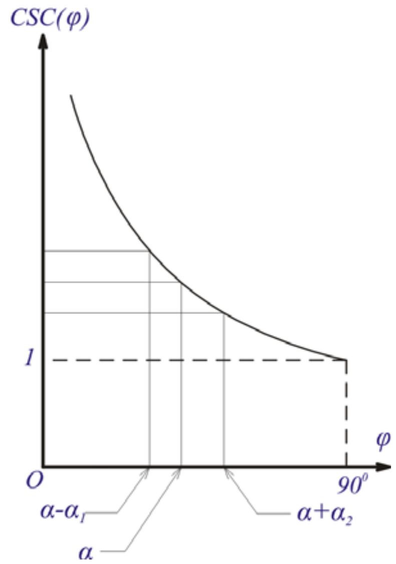
Stąd

$$\csc(\alpha - \alpha_1) = \frac{l}{2h} + \frac{q}{h},$$
$$\csc(\alpha + \alpha_2) = \frac{l}{2h} - \frac{q}{h}.$$

Ponieważ w interesującym nas przedziale kątów α funkcja kosekans ($\csc\alpha = \sin^{-1}\alpha$) jest funkcją o przebiegu wklęsłym (rys. 7), więc jasne jest że jednakowym zmianom bezwzględnej wartości funkcji o q/h muszą odpowiadać kąty α_1 i α_2 takie, że $\alpha_2 > \alpha_1$. Wynika stąd, że $d_2 < d_1$, a zatem w tym przypadku w położeniu symetrycznym mamy równowagę trwałą.



Rys. 6



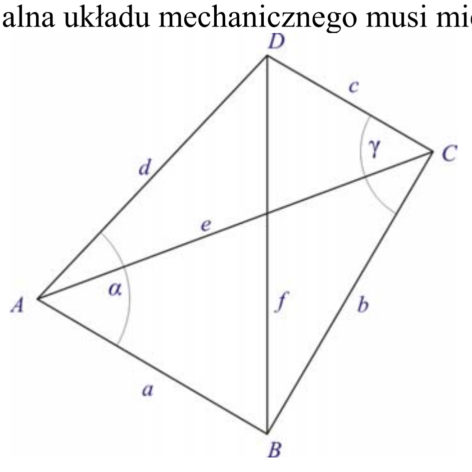
Rys. 7

Podsumowując stwierdzamy, że w równowadze trwałej $\gamma \geq \pi/2$. Wynika stąd, że żądana długość nici l powinna spełniać warunek

$$l \geq \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Zauważmy, że dla cienkiego pręta $a = 0$. Wynika stąd, że cienkiego pręta nie można powiesić poziomo na nitce uwiązanej do jego końców, tak by wisiał on w równowadze trwałej (oczywiście przy zaniedbaniu tarcia). Nitka musiałaby bowiem być nieskończona.

Zadanie powyższe można również rozwiązać korzystając z faktu, że w położeniu równowagi trwałej energia potencjalna układu mechanicznego musi mieć minimum.



Rys. 8

Z rozważań podanych na początku wiemy, że wystarczy ograniczyć się do przypadku φ =0. Wyraźmy więc energię potencjalną obrazka za pomocą parametru x (rys. 3) i zbadajmy, kiedy ta wielkość ma minimum. Jest jasne, że nastąpi to wtedy, gdy odcinek $SO = h$ będzie miał wartość największą. Wystarczy więc zbadać, przy jakim warunku funkcja $h(x)$ w punkcie $x = l/2$ ma maksimum. W tym celu należy zbadać znak drugiej pochodnej $h''(x)$ dla $x = l/2$. Jeżeli wartość $h''(l/2)$ będzie dodatnia, to $h(x)$ w punkcie $x = l/2$ będzie miała minimum, a jeżeli ujemna, to maksimum.

W celu obliczenia funkcji $h(x)$ korzystamy z twierdzenia głoszącego, że jeżeli mamy czworokąt wypukły, taki jak na rysunku 8, to

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd\cos\omega,$$

e i f oznaczają tu przekątne czworokąta, a ω jest sumą kątów przeciwległych.

Dla czworokąta $AOBS$ z rysunku 3 mamy więc

$$h^2b^2 = p^2(l-x)^2 + p^2x^2 - 2p^2x(l-x)\cos\omega, \tag{1}$$

gdzie $\omega = \alpha + \gamma$

Z twierdzenia kosinusów dla trójkąta ASB mamy

$$b^2 = x^2 + (l-x)^2 - 2x(l-x)\cos\gamma\,. \tag{2}$$

Korzystając z tego związku wzór (1) możemy napisać w innej postaci:

$$h^2b^2 = p^2\left(b^2 + 2x(l-x)\cos\gamma\right) - 2p^2x(l-x)\cos(\alpha+\gamma)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h^2b^2}{p^2} - b^2\right) = x(l-x)\left(\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma)\right)$$

Zwróćmy uwagę, że zamiast badać ekstremum funkcji $h(x)$ w punkcie $x = l/2$, wystarczy zbadać ekstremum funkcji

$$z(x) = \frac{1}{2}b^2\left(\frac{h^2(x)}{p^2} - 1\right),$$

czyli funkcji

$$z(x) + x(l-x)\left(\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma)\right).$$

Zauważmy, że kąt γ zależy od zmiennej x. Ściśle biorąc powinniśmy więc napisać:

$$z(x) = x(l-x)\left(\cos\gamma(x) - \cos(\alpha+\gamma(x))\right). \tag{3}$$

Obliczmy pierwszą pochodną tej funkcji. Mamy

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = (l-2x)\left(\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma)\right) - x(l-x)\left(\sin\gamma - \sin(\alpha+\gamma)\right)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x}.$$

Występującą tu pochodną $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x}$, pojawiającą się w wyniku różniczkowania funkcji złożonej, obliczamy różniczkując obustronnie zależność (2):

$$0 = (2x-l)(1+\cos\gamma) + x(l-x)\sin\gamma\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x},$$

Stąd

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x} = \frac{(l-2x)(1+\cos\gamma)}{x(l-x)\sin\gamma}$$

Zatem

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (l-2x)\left[\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma) - \frac{\sin\gamma - \sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}(1+\cos\gamma)\right],$$

czyli

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (l-2x)\frac{\sin(\alpha+\gamma)+\sin\alpha-\sin\gamma}{\sin\gamma}.$$

Widzimy, że dla $x = l/2$ pochodna $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ jest równa zeru, co oznacza, że funkcja $z(x)$ dla $x = l/2$ ma ekstremum. Oczywiście nie jest to dla nas nowiną, bo wniosek ten otrzymaliśmy już wcześniej bez rachunków. Obliczmy teraz drugą pochodną w punkcie $x = l/2$. Mamy

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = -2\frac{\sin(\alpha+\gamma)+\sin\alpha-\sin\gamma}{\sin\gamma}\ \underbrace{(l-2x)}_{=0\ \text{dla}\ x=l/2}\cos\gamma$$

Zatem w punkcie $x = l/2$ wartość drugiej pochodnej wynosi

$$-2\,\frac{\sin(\alpha+\gamma)+\sin\alpha-\sin\gamma}{\sin\gamma},$$

gdzie γ jest wartością kąta $\gamma(x)$ w symetrycznym położeniu obrazka, tj. dla $x = l/2$. Ze względu na fakt, że dla kątów γ mających znaczenie fizyczne ($0 < \gamma < 180°$) $\sin\gamma > 0$ znak drugiej pochodnej jest taki sam jak znak wyrażenia:

$$\sin\gamma - \sin\alpha - \sin(\alpha+\gamma).$$

Napiszmy to wyrażenie w innej postaci:

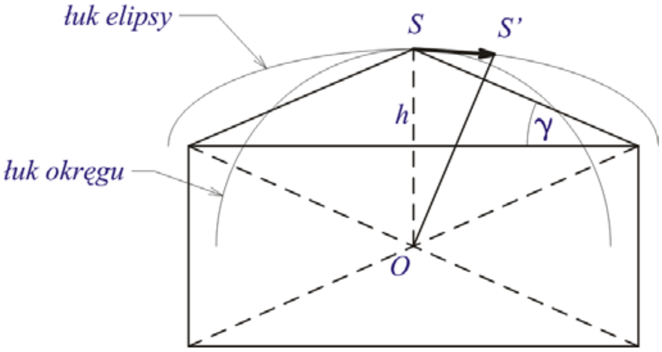
$$\begin{aligned}&\sin\gamma - \sin\alpha - \sin(\alpha+\gamma) = \\ &= \sin\gamma(1-\cos\alpha) - \sin\alpha(1+\cos\gamma) = \\ &= -4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Ponieważ kąty $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\gamma}{2}$ leżą w pierwszej ćwiartce, więc o znaku decyduje $(\alpha+\gamma)/2$.

Jeżeli $(\alpha+\gamma)/2$ jest zawarte w pierwszej ćwiartce, to wyrażenie nasze jest ujemne i funkcja $z(x)$ ma maksimum, jeżeli zaś $(\alpha+\gamma)/2$ leży w drugiej ćwiartce, to wartość drugiej pochodnej jest dodatnia i funkcja $z(x)$ ma minimum. Przypadek, gdy druga pochodna jest równa zeru pozostawiamy do zbadania Czytelnikowi.

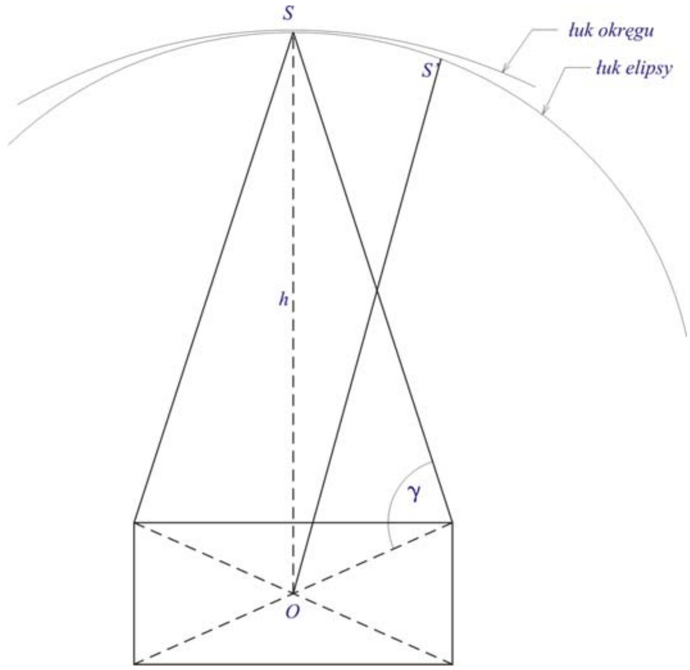
Wnioski, które tu otrzymaliśmy, są oczywiście zgodne z tym, do czego doszliśmy poprzednio.

Zbadanie, czy dla $x = l/2$ funkcja $h(x)$ ma maksimum, czy minimum można przeprowadzić również bez stosowania rachunku różniczkowego. A oto rozważania geometryczne pozwalające dojść do celu.



Rys. 9

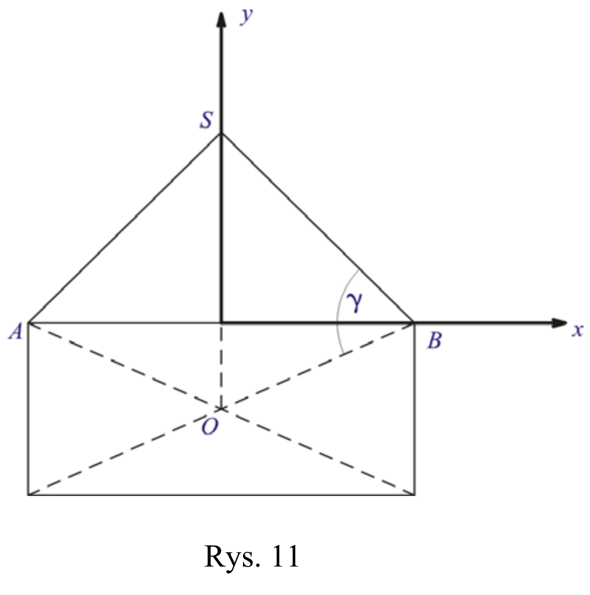
Podobnie jak poprzednio, będziemy rozpatrywać przypadek, gdy $\varphi = 0$. Przy przekręcaniu obrazka punkt S w układzie związanym z obrazkiem zakreśla łuk elipsy, której ogniskami są rogi obrazka, do których przywiązane są końce nitki. Elipsę tę pokazano na rysunku 9.
Zakreślmy z punktu O promieniem $SO = h$ łuk okręgu. Łuk ten jest styczny do elipsy w punkcie S. Nietrudno zauważyć, że w zasadzie mamy tu dwa możliwe przypadki: łuk okręgu może leżeć w otoczeniu punktu S bądź wyżej, bądź niżej niż łuk elipsy. W pierwszym przypadku odległość OS' jest mniejsza niż h. Odpowiada to równowadze trwałej, gdyż dla $S' = S$ długość odcinka $S'O$ osiąga maksimum. Przypadek ten zilustrowano nu rysunku 10.



Rys. 10

Natomiast w drugim przypadku (rys. 9) wielkość $S'O$ dla $S' = S$ ma minimum. Odpowiada temu równowaga chwiejna.

Udowodnimy, że przypadek pierwszy odpowiada $\gamma \geq \pi/2$, a drugi $\gamma < \pi/2$. Weźmy pod uwagę okrąg o środku O i promieniu $SO = h$. Równanie tego okręgu jest następujące (układ współrzędnych pokazano na rys. 11):



Rys. 11

$$x_0^2 + \left(y_0 + \frac{a}{2}\right)^2 = h^2 \tag{4}$$

(x_0, y_0) oznacza punkt bieżący okręgu. Wyznaczamy teraz półosie elipsy.

Krótsza półoś wynosi $SO - \frac{a}{2} = h - \frac{a}{2}$. Natomiast dłuższa jest równa $\frac{l}{2}$. Zatem równanie elipsy zakreślanej przez punkt S jest następujące:

$$\left(\frac{x_e}{l/2}\right)^2 + \left(\frac{y_e}{h - a/2}\right)^2 = 1 \tag{5}$$

(x_e, y_e) oznacza tu punkt bieżący elipsy. Wielkość h, która występuje w powyższych wzorach, jest dana wzorem

$$h = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{l^2 - b^2}\right) \tag{6}$$

ze wzorów (4) i (5) wyznaczamy y_0 i y_e. Dla górnej części elipsy i górnej części okręgu mamy:

$$y_0(x) = \sqrt{h^2 + x^2} - \frac{a}{2},$$

$$y_e(x) = \left(h - \frac{a}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}$$

Aby stwierdzić, co leży wyżej – łuk okręgu, czy łuk elipsy – wystarczy zobaczyć, co jest większe w pobliżu punktu $x = 0$: $y_0(x)$ czy $y_e(x)$. Zbadajmy przypadek $y_0(x) > y_e(x)$, czyli przypadek, któremu odpowiada równowaga trwała. Mamy:

$$\sqrt{h^2 - x^2} - \frac{a}{2} > \left(h - \frac{a}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}} \qquad (>0)$$

gdzie h jest dane wzorem (6). Po przekształceniach otrzymujemy kolejno

$$-x^2 - a\sqrt{h^2 - x^2} > -ha - \left(l^2 - b^2\right)\frac{x^2}{l^2}, \quad (0 <)$$

$$x^2 + a\sqrt{h^2 - x^2} < ha + \left(l^2 - b^2\right)\frac{x^2}{l^2},$$

$$a\sqrt{h^2 - x^2} < ha - \frac{b^2 x^2}{l^2},$$

$$-a^2 l^2 < \frac{x^2}{l^2} - ab^2\left(a + \sqrt{l^2 - b^2}\right)$$

Nierówność ta musi zachodzić dla każdego x bliskiego punktu $x = 0$.
Zatem

$$a^2 l^2 \geq ab^2\left(a + \sqrt{l^2 - b^2}\right).$$

Skąd

$$l \geq \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy ponownie wyprowadzony poprzednio warunek na równowagę trwałą. Czytelnik zechce sprawdzić, że przy przekształcaniu wyżej podanych nierówności podnosiliśmy do kwadratu obie strony tylko wtedy, gdy były one dodatnie (dla x bliskich

$x = 0$). Dzięki temu mamy gwarancję, że otrzymany warunek nie jest warunkiem obcym wynikającym ze stosowania przekształceń nieodwracalnych.

Na zakończenie wspomnimy jeszcze o jednej metodzie wyprowadzenia żądanego warunku. Zauważmy, że $y_e(0) = y_0(0)$. Aby stwierdzić, co leży wyżej – elipsa czy okrąg – można by zbadać, która z funkcji $y_e(x)$ czy $y_0(x)$ szybciej maleje przy odchodzeniu z wartością x od zera, np. w kierunku wartości dodatnich (ze względu na symetrię badanie ujemnych x nie jest konieczne). W tym celu należałoby zbadać, która z pochodnych $y'_e(x)$ czy $y'_0(x)$ jest mniejsza dla wartości $x > 0$, ale bliskich $x = 0$. W przypadku równowagi trwałej powinna zachodzić nierówność

$$y'_0(x) > y'_e(x).$$

Mamy

$$y`_0(x) = -\frac{x}{\sqrt{h^2 - x^2}},$$

$$y`_e(x) = -\frac{\left(h - \frac{a}{2}\right)\frac{4}{l^2}x}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}}.$$

Należy zbadać kiedy

$$-\frac{x}{\sqrt{h^2 - x^2}} > -\frac{\left(h - \frac{a}{2}\right)\frac{4}{l^2}x}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}} \qquad (x > 0\,)$$

Przekształcając tę nierówność otrzymujemy

$$\sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}} < \left(h - \frac{a}{2}\right)\frac{4}{l^2} < \sqrt{h^2 - x^2},$$

$$1 - \frac{4x^2}{l^2} < \left(l^2 - b^2\right)\frac{1}{l^4}\left(\left(a + \sqrt{l^2 - b^2}\right)^2 - 4x^2\right),$$

$$1 < \left(\frac{a}{l} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}}\right)^2 - \frac{b^2}{l^2}\left(\frac{a}{2} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}}\right)^2 + \frac{4xb^2}{l^2}$$

Zatem

$$1 \le \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)\left(\frac{a}{l} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}}\right)^2.$$

Stąd po rozwiązaniu powyższej nierówności względem $\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}}$:

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \ge -\frac{a}{2l} + \sqrt{\left(\frac{a}{2l}\right)^2 + 1},$$

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} + \frac{a}{2l} \ge \sqrt{\left(\frac{a}{2l}\right)^2 + 1} \qquad (>0),$$

$$l^2 \geq \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 + b^2\right),$$

$$l \geq \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Otrzymaliśmy więc to samo co poprzednio. Jak widzimy, zadanie powyższe można rozwiązać wieloma metodami, od łatwych rachunkowo do bardziej złożonych. Mimo to zadanie wypadło raczej niedobrze. Do najpospolitszych błędów (a może nie tyle błędów, co mało racjonalnych sposobów postępowania) należało traktowanie energii potencjalnej jako funkcji dwóch zmiennych i poszukiwanie ekstremum tej funkcji za pomocą metod korzystających z pojęcia pochodnej cząstkowej. Metody te wykraczaj poza program szkół średnich, praktycznie żaden z uczniów nie miał w nich biegłości, a jednak wielu próbowało je stosować, oczywiście bezskutecznie. Niektórzy wprawdzie wykazali w ten sposób, że symetryczne położenie obrazka jest położeniem równowagi (do czego można dojść i bez rachunków: w którą stronę obrazek ma się wychylić – w lewo czy w prawo – jeżeli nie ma żadnego powodu, by jedną ze stron wyróżnić?), ale zbadanie rodzaju równowagi, a więc tego co najistotniejsze, złamało wszystkich, którzy stosowali pochodne cząstkowe. Czasami podczas rozwiązywania zadania warto pomyśleć o sprawach ogólniejszych. Zadania są dla uczniów szkól średnich, wobec tego muszą być rozwiązywalne dostępnymi uczniom metodami i zamiast zapędzać się na opanowany nie więcej niż powierzchownie teren pochodnych cząstkowych warto poszukać rozwiązań korzystających z wiedzy zdobytej w szkole. Ci, którzy tak zrobili, osiągnęli zupełnie dobre wyniki.