XXIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1973/1974). Stopień I, zadanie teoretyczne – T2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski: *Fizyka w Szkole* nr 4, 1974;
Olimpiady fizyczne XXIII i XXIV, WSiP, Warszawa 1977.

Nazwa zadania: Prędkość kątowa przewracającego się sześcianu.

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: Siła, prędkość liniowa, kątowa, równowaga chwiejna, sześcian, energia kinetyczna, potencjalna, moment bezwładności, oś, twierdzenie Steinera, analiza wymiarowa

Zadanie teoretyczne – T2, zawody I stopnia, XXIII OF.

Na doskonale gładkiej płaszczyźnie poziomej znajduje się jednorodny sześcian jedną z krawędzi opierający się o tę płaszczyznę. Kąt między ścianą boczną sześcianu a płaszczyzną poziomą wynosi 45º. Położenie to jest położeniem równowagi chwiejnej i bardzo małe zaburzenia wytrąca sześcian z tego położenia. Znajdź prędkość kątową sześcianu w chwili, gdy całą ścianą boczną dotyka płaszczyzny poziomej. Krawędź sześcianu wynosi *a,* a jego masa – *m*.

Rozwiązanie

Na sześcian działają siły zewnętrzne jedynie o kierunku pionowym: siła ciężkości i siła reakcji podłoża. Jedyną zewnętrzną siłą o kierunku poziomym mogłoby być tarcie, ale tarcia nie ma, bo z założenia płaszczyzna pozioma jest doskonale gładka.

Ze względu na brak poziomej siły zewnętrznej, pozioma składowa pędu środka sześcianu musi być stała, a ponieważ na początku była ona równa zeru, więc cały czas musi równać się zeru. Oznacza to, że środek sześcianu będzie poruszał się tylko w kierunku pionowym.

Szukaną prędkość kątową ω wyznaczamy z warunku

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}_{\substack{\text{energia kinetyczna na końcu} \\ \text{(na początku była równa zeru)}}} = \underbrace{mg\,\frac{a}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}_{\substack{\text{różnica energii potencjalnych} \\ \text{na początku i na końcu}}} \tag{2}$$

gdzie:

v – prędkość środka masy sześcianu,

I – moment bezwładności sześcianu względem osi przechodzącej przez środki przeciwległych ścian,

ε – prędkość kątowa względem tej samej osi.

Aby móc wykonać konkretne obliczenia, do wzoru (2) należy wstawić związek v z ω w chwili końcowej oraz odpowiednie wyrażenie na *I*. Zajmijmy się najpierw pierwszą sprawą.

Prędkość liniowa krawędzi ślizgającej się po płaszczyźnie poziomej względem układu poruszającego się pionowo wraz ze środkiem sześcianu wynosi ω razy połowa przekątnej kwadratu stanowiącego ścianę boczną

$$\upsilon_{1} = \omega \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{2}$$

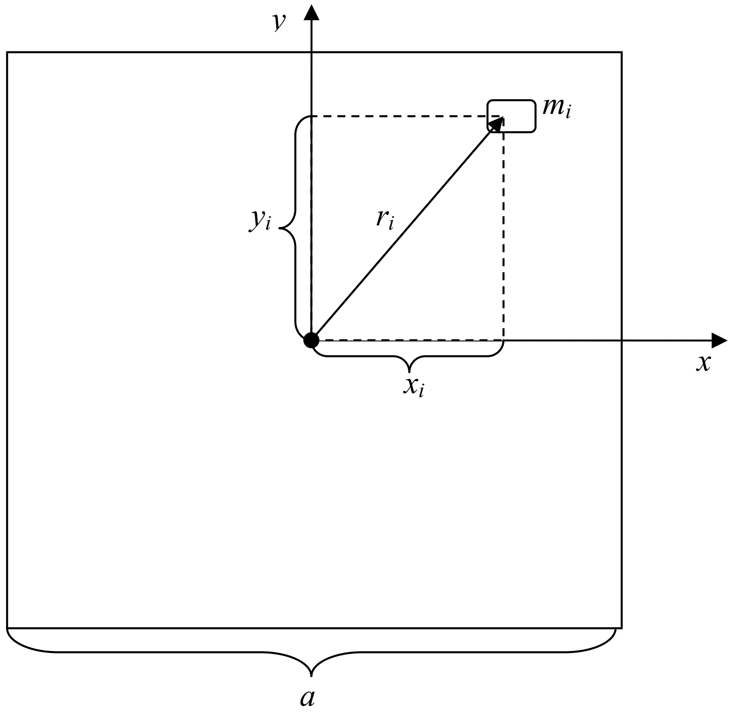
W chwili końcowej prędkości υ_1 jest skierowana pod kątem 45^{o} do poziomu. Wartość pionowej składowej prędkości wynosi wtedy

$$\upsilon_{1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\upsilon_{1} = \frac{1}{2}\omega a \, .$$

Oczywiście tyle samo wynosi wartość prędkości υ:

$$\upsilon = \frac{1}{2}\omega a \, .$$

Obliczmy teraz I. Jasne jest, że moment bezwładności sześcianu względem osi przechodzącej przez środki przeciwległych ścian jest taki sam jak moment bezwładności cienkiej płyty kwadratowej (o masie takiej, jak masa sześcianu i o boku równym krawędzi sześcianu) względem osi prostopadłej do płaszczyzny płyty i przechodzącej przez jej środek. Zajmijmy się więc płytą.



Rys. 1

Podzielmy płytę na bardzo małe elementy o masach m_i zgodnie z rys. 1 mamy

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left(r_i^2 + y_i^2 \right) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 .$$

Ze względu na symetrię mamy

$$\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 \, .$$

Zatem

$$I = 2\sum_i m_i \, x_i^2 \, .$$

Zauważamy teraz, że $\sum_i m_i x_i^2$ jest momentem bezwładności płyty wokół osi pokrywającej się z osią y. moment ten jest oczywiście taki sam jak moment bezwładności pręta o masie równej masie płyty i o długości równej krawędzi płyty względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek. Ponieważ moment bezwładności wynosi $\frac{1}{12}ma^2$, więc

$$I = 2 \cdot \frac{1}{12} ma^2 = \frac{1}{6} ma^2 .$$

Uczniowie znający twierdzenie Steinera mogą wyznaczyć moment bezwładności płyty jeszcze inaczej, korzystając z analizy wymiarowej. Na podstawie określenia momentu bezwładności mamy

$$I = \sum_i m_i r_i^2 .$$

Jasne jest, że jeżeli masę każdego elementu m_i zwiększymy k razy, to zarówno masa płyty jak i jej moment bezwładności wzrosną k razy. W związku z tym możemy napisać

$$I \sim m.$$

Podobnie, jeżeli wszystkie r_i zwiększymy l razy, to moment bezwładności I wzrośnie l^2 razy, a rozmiar linowy płyty powiększy się l razy. Wobec tego

$$I \sim a_2.$$

Ostatnie dwie zależności możemy zapisać łącznie

$$I = \alpha m a^2. \tag{3}$$

Wielkość ma^2 ma wymiar momentu bezwładności. Zatem współczynnik proporcjonalności α musi być bezwymiarowy. Jedynymi parametrami charakteryzującymi mechaniczne właściwości rozpatrywanej płyty są m i a. z wielkości tych nie można utworzyć żadnej nietrywialnej kombinacji bezwymiarowej. Współczynnik α musi więc być zwykłą niemianowaną stałą niezależną od m i a.

Podzielmy teraz płytę na cztery części tak jak na rys. 2. Moment bezwładności każdej z czterech części względem osi przechodzącej przez punkt O i prostopadłej do płaszczyzny rysunku oznaczamy przez I_1. Mamy

$$I = 4I_1,$$

Ale zgodnie z twierdzeniem Steinera

$$I = I' + \frac{m}{4} d^2 .$$

Gdzie I' jest moment bezwładności każdej z czterech części względem własnego środka. Zgodnie z wzorem (3) mamy

$$I' = \alpha \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^2 ,$$

zatem

$$\alpha m a^2 = 4 \left[\alpha \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{m}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 a^2 \right].$$

Stąd

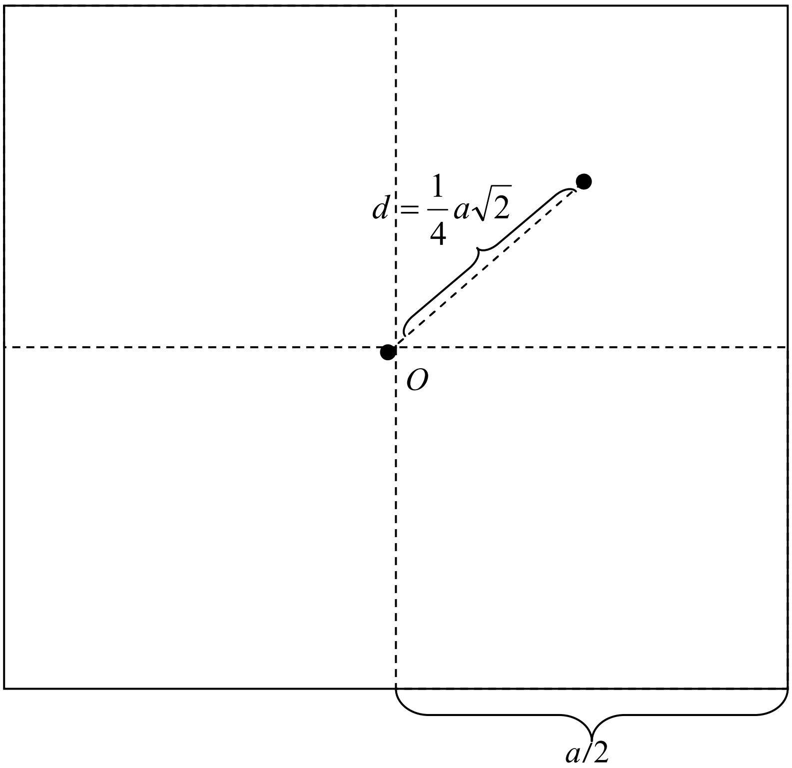
$$\alpha = \frac{1}{6}.$$

Wobec tego

$$I = \frac{1}{6} ma^2 .$$

Podstawiając związek υ z ω oraz wzór na I do zależności (2), wyznaczymy ω. Po krótkich obliczeniach otrzymujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{12}{5}\frac{g}{a}\left(\sqrt{2}-1\right)}.$$



Rys. 2

Według wstępnych danych zadanie to wypadło dość słabo. Część zawodników przyjmowała, że dolna krawędź sześcianu jest nieruchoma, co nie jest prawdą. Sporo kłopotów sprawiało również ustalenie związku υ z ω oraz wyznaczenie I. przytoczone tu dwie metody wyznaczania I są zupełnie elementarne i warto je wykorzystać w praktyce szkolnej.