XXIII OLIMPIADA FIZYCZNA (1973/1974). Stopień wstępny – zad. doświadczalne – D

Źródło: Olimpiady Fizyczne XXIII i XXIV, WSiP, Warszawa 1977

Autor: Waldemar Gorzkowski

Nazwa zadania: Drgania powierzchni wody

Działy: Ruch drgający i falowy

Słowa kluczowe: częstotliwość drgań, gęstość cieczy, prędkość fali, długość fali, lepkość, stała Plancka, analiza wymiarowa

---

Zadanie doświadczalne - D, stopień wstępny, XXIII OF.

Prostopadłościenne naczynie szklane lub drewniane o długości ścianki bocznej L (L powinno wynosić około 1 m) napełnij wodą do wysokości h takiej, by $h << L$. Wpraw wodę w naczyniu w drganie, np. uderzając w ściankę prostopadłą do ścianki o długości L. Po wygaśnięciu drgań o wyższych częstościach pozostaną tylko drgania, podczas których powierzchnia wody waha się pozostając niemal płaska. Wyznacz częstotliwość tych drgań f w zależności od wysokości słupa wody h długości ścianki L. Metodą prób postaraj się do otrzymania wyników dopasować możliwie prosty wzór algebraiczny.

Rozwiązanie

Przede wszystkim zastanówmy się, jak można by wyprowadzić wzór teoretyczny na f zastanówmy się, od czego wielkość ta mogłaby być zależeć. Z tekstu zadania wynika, że z parametrów układu w grę mogą wchodzić L i h o wymiarze metra. Jednak z samych tych wielkości nie można utworzyć wielkości o wymiarze f, czyli o wymiarze s^{-1}. Trzeba więc znaleźć jeszcze jakiś parametr, który charakteryzowałby badane zjawisko. Jednym z takich parametrów mogłaby być gęstość cieczy ρ. Łatwo jednak sprawdzić, że z L, h i q wielkości wymiarze s^{-1} utworzyć nie można po prostu dlatego, że żadna z tych trzech wielkości w swym wymiarze nie zawiera sekundy, która jakoś nie chce się pojawić, dochodzą kłopoty z gramem występującym w wymiarze g, którego z kolei nie wiadomo, jak można by się pozbyć - ρ więc odrzucamy. Drgania zachodzą pod wpływem siły ciężkości, wobec tego jest dość prawdopodobne, że we wzorze na f wystąpi g. Zobaczmy więc, z L, h i g można skonstruować wielkość o wymiarze s^{-1}. Już parę prób wskazuje, że można. Jednym z wyrażeń jest:

$$f = \alpha \sqrt{g/h}\,.$$

Innym

$$f = \beta \sqrt{g / L}\,.$$

Jeszcze innym

$$f = \gamma \sqrt{gh / L^2}$$

Wielkości α, β i γ oznaczają tu stałe bezwymiarowe.

Łatwo zauważyć, że różnych możliwości jest tu nieskończenie wiele. Jak więc rozstrzygnąć, która z nich jest prawdziwa? Na podstawie samej analizy wymiarów jest to niemożliwe i trzeba odwołać się albo do doświadczenia, albo wykonać odpowiednie obliczenia.

Jeżeli chodzi o ścisłe obliczenia, to sprawa wygląda beznadziejnie; ciecz bowiem nie porusza się jak ciało sztywne, każdy punkt cieczy porusza się z inną, trudną do określenia prędkością i bez z konieczności dość grubych przybliżeń nie można się obejść, a wzór otrzymany przy zbyt grubych przybliżeniach nie będzie miał wartości większej niż to, co otrzymuje się za pomocą analizy wymiarowej.

Zanim odwołamy się do doświadczenia spróbujmy sobie jakoś poradzić łącząc analizę wymiarową z naturalnymi wyobrażeniami dotyczącymi obserwowanego zjawiska.

Weźmy pod uwagę bardzo rozległy (nieskończony) zbiornik z wodą. Głębokość wody niech wynosi *h.* W rozpatrywanym zbiorniku mogą w zasadzie rozchodzić się dwa rodzaje fal. Jeden rodzaj to fale rozchodzące się przy samej powierzchni związane z napięciem powierzchniowym (zmarszczki na powierzchni). Ten rodzaj fal nas nie interesuje, bo w zadaniu chodzi o ruch cieczy zachodzący w całej objętości. Drugi zaś rodzaj fal, to właśnie fale nas interesujące, którym odpowiada ruch cząsteczek cieczy w całej objętości zbiornika. Wyznaczmy prędkość tych fal. Łatwo zauważyć, że z wielkości charakteryzujących rozważane teraz zjawisko wielkość o wymiarze prędkości można utworzyć jedynie *z h* i *g i* to tylko w jeden sposób:

$$v = \alpha \sqrt{gh}$$

gdzie α jest pewną stałą bezwymiarową.

A teraz wróćmy do naszego zadania. To co obserwujemy w naczyniu, to po prostu fala stojąca. Długość tej fali wynosi *L*. Długość odpowiedniej fali biegnącej wynosi więc 2*L*, prędkość zaś

$$v = \alpha \sqrt{gh} \ .$$

Zatem częstotliwość drgań powinna być równa:

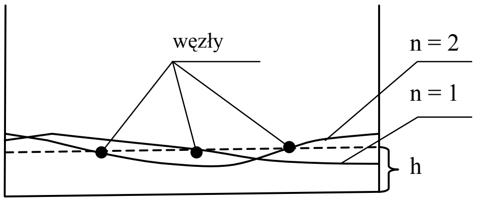
$$f = \frac{\alpha}{2L}$$

$$f = \beta \sqrt{g/L} \ .$$

Inaczej mówiąc

$$f \sim \sqrt{h} / L$$

Tak wiec otrzymaliśmy pewną zależność i powinniśmy ją sprawdzić doświadczalnie.



Rys. 1.

Zanim przejdziemy do krótkiego omówienia strony doświadczalnej zwróćmy uwagę, że w naczyniu może zachodzić więcej drgań. Drganie, o które chodzi w zadaniu, stanowi falę stojącą o jednym węźle. Możliwe są również fale stojące o liczbie węzłów równej 2, 3, 4,... itd. Na rys. 1 pokazano fale stojące o jednym i dwóch węzłach. Zauważmy, że długość fali biegnącej odpowiadającej fali stojącej o *n* węzłach wynosi *2L/n.* Zatem dla drgań o *n* węzłach częstotliwość f_n powinna wyrażać się wzorem

$$f_n \sim \alpha n \sqrt{gh}/2L$$

Jeżeli chodzi o wartość liczbową stałej α, to niestety nie można jej wyznaczyć w prosty sposób. Przytoczymy więc wynik, który otrzymuje się przy użyciu metod stosowanych w mechanice ośrodków ciągłych.

Oto on: $\alpha = 1$

Rozważaniom naszym można postawić pewien zarzut. Otóż przy wyprowadzaniu wzoru na v milcząco przyjęliśmy, że wielkość ta nie zależy od długości fali λ. Nie da się tego ukryć. To prawda. Czy jest to założenie słuszne? Jeżeli tak, to wzór na f jest poprawny, jeżeli zaś nie, to trzeba by doświadczalnie sprawdzić, który z nieskończenie wielu wzorów rozpatrywanych na początku jest najlepiej spełniany, a to rzecz kłopotliwa. Spróbujmy słuszność wspomnianego założenia rozstrzygnąć. Jeżeliby v zależało od h i λ, to zawsze moglibyśmy przedstawić tę wielkość w postaci pewnej funkcji h i stosunku h/λ; $v = v(h, h/\lambda)$. Zauważmy jednak, że jeżeli $h \ll \lambda$, to $h/\lambda \approx 0$ i mamy

$$v = v(h, h/\lambda) \approx v(h, 0) = v(0)$$

Tak więc w przypadku fal o długości λ znacznie przekraczającej głębokości zbiornika h wyprowadzony przez nas wzór ze spokojem możemy stosować. Teraz już wszystko jest w porządku, tyle tylko, że wzór na f można stosować jedynie wtedy, gdy $h \ll L$. Jeżeli zaś chodzi o dodatkowo wyprowadzony wzór na f_n, to rzecz jasna można go stosować dla takich n, dla których $h \ll L/n$.

Podsumowując rozważania stwierdzamy, że szukana częstotliwość fali f powinna być proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z głębokości wody h i odwrotnie proporcjonalna do długości zbiornika L.

Należy teraz wykonać odpowiednie doświadczenie. W tym celu można skorzystać z drugiego akwarium. Ze zmianami h nie ma problemu, jeżeli zaś chodzi o zmiany L, to dobrze jest zaopatrzyć się w dodatkową płytkę szklaną o szerokości nieco mniejszej niż szerokość akwarium. Na płytkę tę należy nałożyć dookoła nakładkę gumową, np. z rozciętego wzdłuż węża gumowego. Zmiany L osiąga się wkładając płytkę prostopadle w różne miejsca akwarium. Drgania możemy wzbudzać poprzez poruszenia płytki. Okres można mierzyć za pomocą stopera, przy czym należy pamiętać, że dla zmniejszenia błędu należy mierzyć okres nie jednego, lecz wielu drgań i brać średnią.

Ponieważ interesują nas drgania o niewielkiej amplitudzie, a takie czasami trudno obserwować, wygodnie jest umieścić w pobliżu akwarium żaróweczkę i obserwować drgania obrazu włókna żaróweczki powstałego wskutek odbicia.

Mając wyniki pomiarów f dla różnych wartości L i h robimy wykres zależności f od $\sqrt{h}/L$. Okazuje się, że wykres ten istotnie przedstawia prostą, przy czym rozrzut punktów doświadczalnych jest dość mały. Na marginesie tego zadania warto poruszyć pewien problem ogólny dotyczący analizy wymiarowej. Uważny Czytelnik na pewno zwrócił uwagę, że niektórych mianowanych wielkości fizycznych w ogóle nie uwzględniliśmy w naszych rozważaniach, chociaż wydawałoby się, że mogą one odgrywać pewną rolę. Na przykład nie uwzględniliśmy lepkości. Łatwo zauważyć, że z lepkości o wymiarze g/(cm·s), gęstości o wymiarze g/cm^3 oraz długości o wymiarze cm można utworzyć wielkość o wymiarze s lub s^{-1}. Czy więc otrzymane przez nas wnioski są błędne? Otóż sprawa przedstawia się tak, że włączenie do rozważań każdej nowej wielkości mianowanej jest równoważne powiększeniu zakresu zjawisk, które bierzemy pod uwagę, o te, w których ta wielkość odgrywa istotną rolę. Zilustrujemy to przykładem. Wiadomo, że lepkość powoduje dysypację energii, a w konsekwencji tłumienie drgań. Jeżeli więc do rozważań włączymy lepkość, to będzie to związane z uwzględnieniem w jakiejś normie tłumienia. Tymczasem tłumienie nas nie interesuje. Interesuje nas ruch okresowy, a więc nietłumiony. Wprawdzie tłumienie drgań wyższych w początkowym okresie po wzbudzeniu jest ważne, ale ta faza eksperymentu ma dla nas drugorzędny charakter.

Przedmiotem naszych badań są jedynie drgania praktycznie nietłumione występujące po pewnym czasie od chwili wzbudzenia układu. Dlatego właśnie odrzuciliśmy lepkość z rozważań. Wielkość o wymiarze czasu otrzymana przy uwzględnieniu lepkości może charakteryzować czas zaniku drgań, ale nie może charakteryzować okresu drgań. Z podobnych względów nie ma w naszych rozważaniach stałej gazowej R, bo nie interesują nas zmiany stanu; nie ma stałej Plancka h, bo zjawiska o charakterze kwantowym nie odgrywają tu roli; nie ma prędkości światła c, bo drgania odbywają się z niewielką prędkością i uwzględnianie efektów relatywistycznych jest zbędne itp.; w rozważaniach występuje natomiast przyspieszenie ziemskie g, bo siła ciężkości jest istotnym elementem badanego zjawiska.