XXII OLIMPIADA FIZYCZNA.(1972/1973). Stopień III, zadanie teoretyczne – T1.

Źródło: XXI i XXII Olimpiada Fizyczna, WSiP Warszawa, 1975

Autor: Andrzej Szymacha

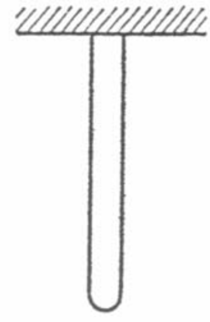
Nazwa zadania: Spadająca lina

Działy: Dynamika

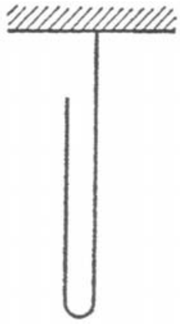
Słowa kluczowe: lina, haki

Zadanie teoretyczne - T2, zawody III stopnia, XXII OF.

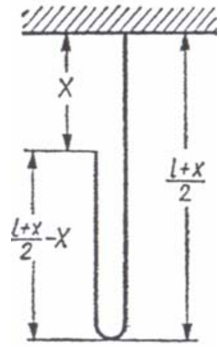
Cienka, jednorodna, wiotka, ale nierozciągliwa lina o długości całkowitej l i masie M początkowo była umocowana obydwoma końcami do blisko siebie położonych haków i zwisała swobodnie, tak jak na rysunku 1. W pewnej chwili koniec liny zwolniono i lina zaczyna opadać (rys. 2). Wiadomo, że największe obciążenie, które wytrzymuje *każdy z* haków, wynosi N (większe od ciężaru liny Mg). Jaki dokładnie warunek muszą spełniać wielkości Mg i N, aby w czasie opadania górny koniec liny nie wyrwał haka.
Zakładamy, że w czasie opadania każdy element liny zaraz po osiągnięciu odpowiadającego mu położenia końcowego zatrzymuje się i pozostaje nieruchomy.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Rozwiązanie

Dzięki wyidealizowanym własnościom liny możemy znaleźć bez kłopotu jej ruch. Ponieważ lina jest wiotka, więc swobodny koniec liny opada z przyspieszeniem g. Ponadto, w danej chwili czasu t wszystkie punkty lewej części liny mają prędkość $v = gt$. Wyznaczmy teraz, jaka jest w chwili t masa ruchomej części liny. Oznaczając drogę przebytą przez spadający koniec liny przez x, możemy bez trudu znaleźć długość pozostałych interesujących nas odcinków (patrz rys. 3). Ponieważ ruchoma część ma masę stanowiącą taki ułamek całkowitej masy M, jakim ułamkiem całkowitej długości l jest długość spadającego odcinka, więc

$$m_{część\ ruchomej} = M\frac{\frac{l-x}{2}}{l} = \frac{M}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Pęd ruchomej części liny, będący zarazem całkowitym pędem linowym

$$P = \frac{M}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)gt.$$

Skorzystajmy jeszcze z prawa spadku swobodnego

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

i wyraźmy pęd liny w funkcji czasu

$$P = \frac{M}{2}\left(1 - \frac{1}{2l}gt^2\right)gt.$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki, pochodna po czasie, całkowitego pędu układu równa się sumie wszystkich sił zewnętrznych działających na układ. Siłami tymi są w przypadku naszej liny: siła ciężkości całej liny i siła reakcji haka R. Uwzględniając kierunki mamy:

$$Mg - R = \frac{dP}{dt}.$$

Wykonując proste różniczkowanie wzoru (3) dostajemy

$$R = \frac{Mg}{2} + \frac{3}{2}Mg\frac{x}{l} = \frac{Mg}{2}\left(1 + 3\frac{x}{l}\right).$$

Siła ta rośnie wraz z wartością x od najmniejszej wartości równej ciężarowi połowy liny $\frac{Mg}{2}$ do wartości maksymalnej osiąganej dla $x = l$, a więc

$$R_{\max} = 2Mg.$$

Warunek, o którym mowa w zadaniu, ma więc postać:

$$N > 2Mg.$$

O ile hak nie został wyrwany w czasie spadania, to oczywiście po zupełnym rozprostowaniu się liny wartość siły reakcji R zmaleje skokowo do wartości *Mg*.

Zadanie to, ku rozczarowaniu Komitetu Głównego, sprawiło bardzo poważne trudności zawodnikom. A przecież jest to jedno z najprostszych zadań prezentowanych w tej książeczce. Trudności brały się stąd, że niemal nikt nie spojrzał na zjawisko z punktu widzenia całej liny, lecz prawie wszyscy rozpatrywali bądź jedną, bądź drugą część liny i starali się stosować równania dla ruchu o zmiennej masie, przy czym większość zawodników nie bardzo rozumiała co robi. A przecież prawa ruchu ciała o zmiennej masie nie wyrażają nic innego, jak pełny bilans pędu. Z kolei ci zawodnicy, którzy rozumieli problem dynamiki, mylili się w prostej geometrii utożsamiając element Δx, o który w czasie Δt opadł swobodny koniec liny, z długością fragmentu liny, który się w tym samym czasie zatrzymał. W rzeczywistości ten ostatni jest równy tylko połowie pierwszego, co jednak mało kto zauważył.