XXII OLIMPIADA FIZYCZNA (1972/1973). Stopień III, zadanie doświadczalne - D.

Źródło: Olimpiady Fizyczne XXI i XXII, WSiP,1975

Autor: Andrzej Szymacha

Nazwa zadania: Soczewka pozbawiona aberracji sferycznej

Działy: Optyka geometryczna.

Słowa kluczowe: Soczewka płasko-wypukła, aberracja sferyczna, wiązka promieni, współczynnik załamania, ogniskowa, promień, optyka falowa, ogniskowanie

Zadanie doświadczalne – D, zawody III stopnia, XXII OF.

Wyznacz kształt powierzchni soczewki płasko-wypukłej, która ogniskuje równoległą wiązkę promieni bez aberracji sferycznej. Przyjmujemy, że światło pada prostopadle od strony powierzchni płaskiej.

Oblicz grubość tej soczewki w środku, przyjmując następujące dane liczbowe: promień soczewki r = 5 cm, odległość ogniskowa od płaskiej powierzchni soczewki f = 12 cm, współczynnik załamania szkła n = 1,5.

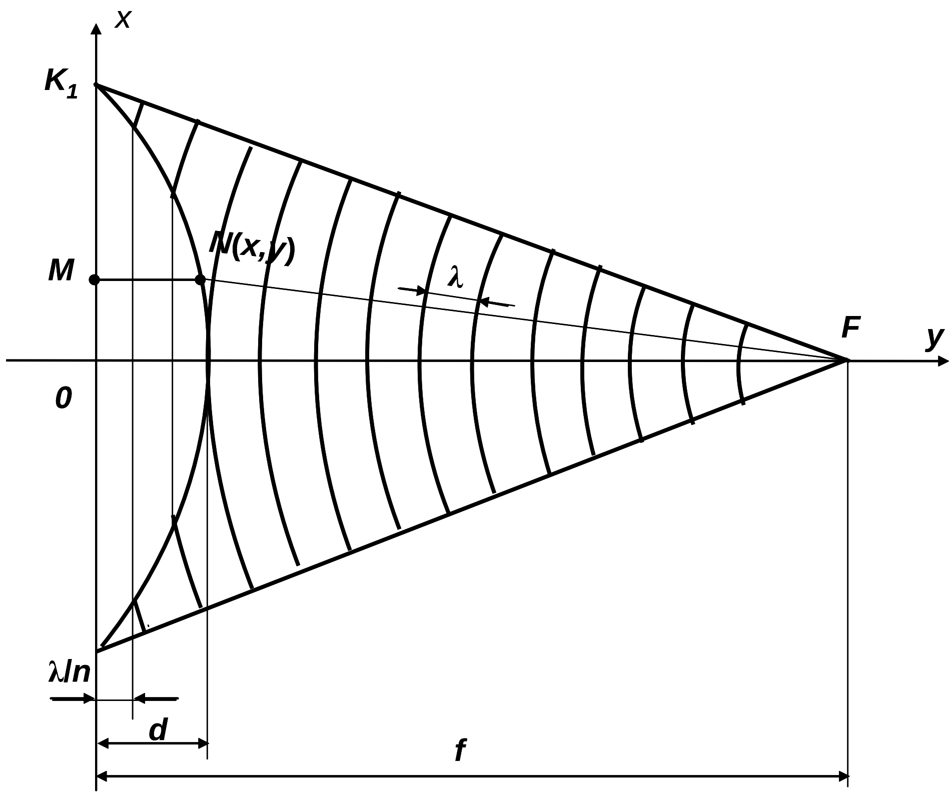
Wskazówka: Zadanie to znacznie łatwiej rozwiązać analizując proces ogniskowania z falowego punktu widzenia.

Rozwiązanie

Część teoretyczna

Narysujmy kształt powierzchni falowych dla fali początkowo płaskiej, która wnika do soczewki i po wyjściu zbiega się ściśle do jednego punktu - ogniska (rys. 1). Zaznaczamy na rysunku te powierzchnie falowe, na których amplituda fali ma w danej chwili wartość maksymalną (grzbiet fali). Oznacza to oczywiście, że odległości kolejnych takich czół fali są równe długości fali.

Założenie, że wszystkie promienie, tj. proste prostopadle do powierzchni falowych, zbiegają się w jednym punkcie oznacza, że czoła fal po prawej stronie soczewki są współśrodkowymi sferami. Jasne jest, że wewnątrz soczewki, tj., po przejściu fali przez powierzchnię płaską, czoła fal nadal są płaszczyznami równoległymi do pierwotnego czoła fali, jednakże odległość między nimi, równa długości fali w ośrodku, jest tam mniejsza niż w próżni i wynosi λ/n (n - długość fali w próżni). Patrząc na rysunek widzimy, że z samej istoty procesu falowego, liczba grzbietów fal zawarta między ogniskiem, a płaską powierzchnią soczewki jest określona stałą liczbą. Licząc grzbiety fal musimy dostać wynik niezależny od drogi, wzdłuż której to robimy. Policzymy te grzbiety idąc wzdłuż trzech dróg: OF, MNF i KF i otrzymane wyniki przyrównajmy do siebie. Nim przystąpimy do liczenia, wyprowadzimy jeszcze układ współrzędnych, zaznaczony na rysunku, i przyjmijmy, że punkt ma współrzędne (x,y).



Rys. 1

Poszukiwaną grubość soczewki oznaczymy przez d.

1. Ilość grzbietów wzdłuż odcinka OF:

$$\left(\frac{d}{\lambda/n}\right)+\left(\frac{f-d}{\lambda}\right) \tag{1}$$

2. Ilość grzbietów wzdłuż łamanej MNF:

$$\left(\frac{y}{\lambda/n}\right)+\left(\frac{\sqrt{x^2+(f-y)}}{\lambda}\right) \tag{2}$$

3. Ilość grzbietów wzdłuż odcinka KF:

$$\frac{\sqrt{r^2+f^2}}{\lambda} \tag{3}$$

Wszystkie te liczby są sobie równe. Przyrównując do siebie wyniki (1) i (3) dostajemy:

$$\frac{nd}{\lambda}+\frac{f-d}{\lambda}=\frac{\sqrt{r^2+f^2}}{\lambda} \tag{4}$$

Jak widzimy, możemy powyższe równanie uprościć mnożąc stronami przez λ. Długość fali wypada więc całkowicie z równania (4), jak być powinno, gdyż współczynnik załamania jest równy 1,5 i nie zależy od λ. Z równania (4) dostajemy natychmiast grubość soczewki wyrażoną przez wielkości dane w treści zadania

$$d = \frac{\sqrt{r^2 + f^2} - f}{n-1} = 2\ cm \tag{5}$$

W celu znalezienia równania opisującego kształt soczewki przyrównujemy do siebie liczby grzbietów fal policzone na drogach (2) i (3).

$$ny + \sqrt{x^2 + (f-y)^2} = \sqrt{r^2 + f^2} \tag{6}$$

Jest to właściwie koniec rozwiązania, gdyż w ogólnym przypadku, mówiąc „kształt" rozumiemy przez to równanie odpowiedniej krzywej (czy powierzchni) w określonym układzie współrzędnych. W naszym przypadku krzywa opisana równaniem (6) (będąca przekrojem płaskim obrotowej powierzchni soczewki jest znaną dobrze krzywą z rodziny stożkowych, dlatego celowym jest takie przekształcenie równania (6), by fakt ten był wyraźnie widoczny. Usuwając z równania (6) niewymierność, dostajemy po elementarnych przekształceniach następujące równanie:

$$(n-1)\left[y\,\frac{\sqrt[n]{r^2+f^2}-f}{n^2-1}\right]^2 - x^2 = \frac{\left(n^2+1\right)f^2 + r^2 - 2nf\sqrt{r^2+f^2}}{n^2-1}, \tag{7}$$

które , jak wiemy z lekcji matematyki, przedstawia hiperbolę. Oczywiście, wskutek podnoszenia równania (6) do kwadratu dostaliśmy równanie (7) opisujące obie gałęzie hiperboli, podczas gdy równanie pierwotne (6) opisywało tylko jedną z nich. A zatem soczewka płasko-wypukła, skupiająca bez aberracji sferycznej równoległą wiązkę promieni, musi mieć kształt czaszy odciętej z jednej powłoki dwupołówkowej hiperboloidy obrotowej.

Część doświadczalna

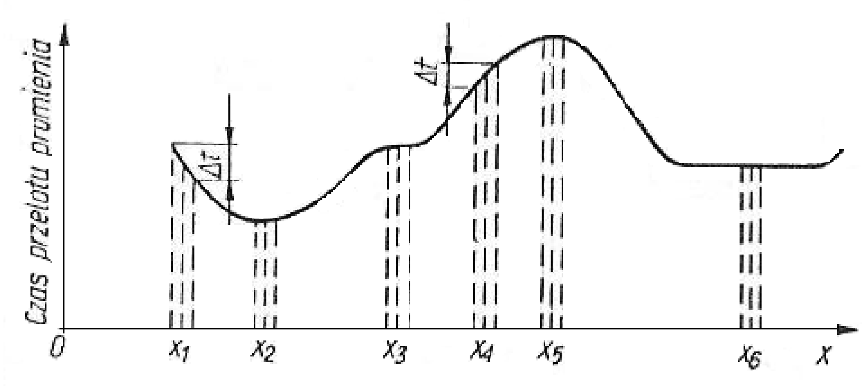
Z przedstawionego rozwiązania wynika, że porównywanie ze sobą liczby grzbietów fal obliczonych aż na trzech różnych drogach było zbędne. Wystarczyło to zrobić dla drogi MNF i KF, gdyż to wystarczyłoby do znalezienia równania soczewki (7), z którego łatwo wyznaczyć *d* będące współrzędną y punktu, dla którego x = 0. Jednakże wybrany sposób postępowania pozwolił obliczyć nam wartość *d* niemal w pamięci. Wspomnijmy jeszcze o innych sposobach rozwiązywania tego zadania i pewnym charakterystycznym błędzie popełnianym przez znakomitą większość finalistów.

Otóż przedstawiony tutaj sposób rozwiązania, do którego jednoznacznie skłaniała podana w tekście wskazówka, wybrało zaledwie dwóch zawodników. Dwóch czy trzech innych próbowało ułożyć i rozwiązali równanie różniczkowe krzywej wykreślającej kształt soczewki, wyprowadzone z prawa Snelliusa - wszyscy pozostali natomiast powoływali się na zasadę Fermana. Niestety, znów tylko dwóch z nich przeprowadziło rozumowanie wiążące zasadę Fermata, w jej dosłownym brzmieniu, z problemem wyznaczenia kształtu soczewki. Rozumowanie to jest następujące:

Zasada Fermata mówi, że promień światła biegnie od punktu 1 do punktu A wzdłuż jakiejś drogi wtedy i tylko wtedy, gdy czas na to potrzebny jest ekstremalny w porównaniu z czasem przebiegu po wszystkich innych sąsiednich drogach łączących ze sobą punkty A i B. Określenie - ekstremalny w sformułowaniu zasady Fermata nie musi odnosić się do minimum - jak to często większość uczniów przypuszcza ani też niekoniecznie musi oznaczać maksimum. Jeśli zastanowić się nad fizycznym pochodzeniem zasady Fermata, to okazuje się, że istotne jest, by fale idące wzdłuż sąsiednich dróg interferowały ze sobą, a więc przychodziły niemal w tych samych fazach. Wprawdzie zagadnienie ekstremum w ogólnym sformułowaniu zasady Fermata dotyczy wielkości (czasu przelotu) zależnej od więcej niż jednej zmiennej -

jest to typowe zagadnienie tzw. rachunku wariacyjnego - ale istotę problemu można zrozumieć wyobrażając sobie, że wszystkie „sąsiednie" drogi, które rozważamy, są określone przez jeden parametr. Wtedy i czas przelotu jest funkcją tego parametru, a problem ekstremum sprowadza się do badania funkcji jednej zmiennej (czasu przelotu w funkcji parametru charakteryzującego rozważane drogi promienia). Przyjmijmy więc, że tak właśnie jest, i zastanówmy się, kiedy fazy fali świetlnej idącej wzdłuż równych, ale bliskich sobie dróg scharakteryzowanych parametrem -nazwijmy go x - są sobie równe. Będzie tak oczywiście wtedy, gdy czasy przelotu (czyli ilość drgań fali) po sąsiednich drogach będą prawie równe.

Przypatrzmy się zmianom wartości czasu przelotu odpowiadającym ustalonej zmianie o ± ε parametru x, w otoczeniu różnych punktów na krzywej, będącej wykresem czasu przelotu promienia w funkcji parametru x dla jakiejś hipotetycznej sytuacji fizycznej (rys. 2). Wszystkie drogi scharakteryzowane symbolicznie parametrem x łączą ze sobą ustalone dwa punkty A i B widzimy, że zmiany czasu przelotu, przy ustalonej niewielkiej zmianie parametru charakteryzującego hipotetyczne drogi promieni świetlnych są niesłychanie małe w otoczeniu tych punktów (x_2, x_3, x_5, x_6), w których znika pochodna czasu przelotu po parametrze x. Znikanie pochodnej jest istotnie charakterystyczną cechą minimum oraz maksimum funkcji, ale pochodna znika również w tzw. punktach siodłowych (x_3) oraz we wszystkich odcinkach, gdzie



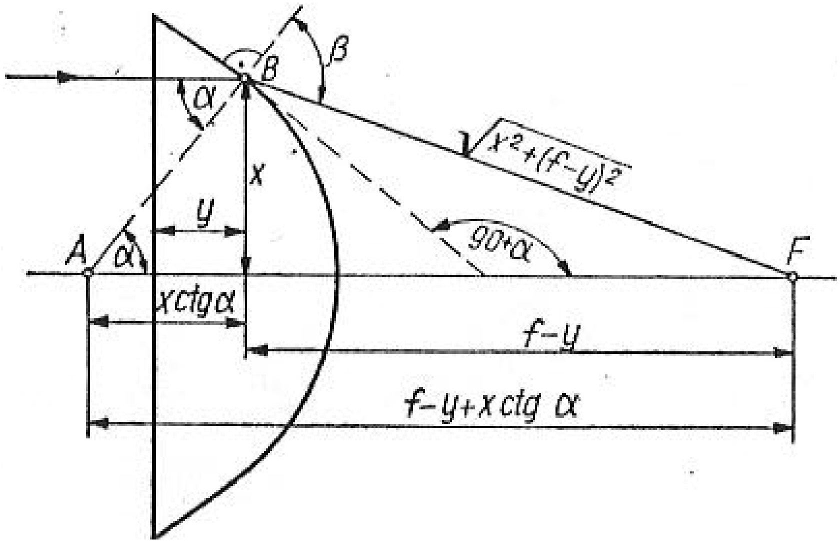
Rys. 2

funkcja jest stała. To jest dokładne znaczenie słowa ekstremalny użytego w sformułowaniu zasady Fermata.

Podsumowując naszą dyskusję hipotetycznej sytuacji fizycznej, powiemy, że spośród wszystkich możliwych do wyobrażenia przebiegów promieni od jednego ustalonego punktu A do drugiego, ustalonego punktu B, rzeczywiście zrealizowane mogą być tylko przebiegi scharakteryzowane parametrami x_2, x_3, x_5, oraz nieskończenie wiele dróg odpowiadających parametrowi x zawartemu w odcinku (a,b). Choćbyśmy nie wiem jak się starali, promień światła nie pobiegnie wzdłuż drogi scharakteryzowanej parametrem na przykład x_1.

Co to wszystko ma wspólnego z naszą soczewką? Otóż ma, i to bardzo wiele. Przede wszystkim wyobraźmy sobie, że nasza wiązka promieni padających na soczewkę wychodzi z bardzo odległego (w granicy nieskończenie odległego) punktu, który utożsamimy z punktem A występującym w zasadzie Fermata. Punktem B jest oczywiście ognisko soczewki. Ponieważ w ośrodku jednorodnym promienie i tak muszą biec po prostych (są to jedyne krzywe ekstremalne), więc wystarczy ograniczyć się do torów łamanych, załamujących się na zakrzywionej powierzchni soczewki. Ograniczając się dalej do przekroju soczewki jedną z jej płaszczyzn symetrii, sprowadzamy badanie zależności czasu przelotu od drogi promienia do badania zależności tego czasu od parametru x. Hipotetyczna sytuacja rozpatrzona przed chwilą może czasami być sytuacją realną! Nawet parametr x jest tym samym parametrem który występuje na rysunku 1. Teraz następuje kulminacyjny punkt rozumowania. Soczewka skupiająca bez aberracji jest, z definicji, takim wyjątkowym układem, dla którego nieskończenie wiele sąsiadujących przebiegów, wypełniających skończony wielocentymetrowy obszar i zarazem łączących dwa ustalone punkty A i B muszą być jednocześnie przebiegami ekstremalnymi (w sensie przed chwilą wyjaśnionym). Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna czasu przebiegu po parametrze x znika, nie w jednym punkcie, ale dla wszystkich punktów soczewki! A to właśnie oznacza, że równanie powierzchni soczewki uzyskamy żądając, by czas przebiegu po wszystkich łamanych był stały. Łatwo sprawdzić, że ów warunek jest dokładnie równoważny równaniu (6), do którego doszliśmy w sposób znacznie prostszy. Na tym przykładzie szczególnym uwidacznia się ogólniejszy związek praw optyki geometrycznej (zasady Fermata) z prawami ruchu falowego. Zapoznawszy się głębiej z problemem powiedzcie teraz sami, czy można wysoko ocenić takie „uzasadnienie' metody spotykane w 90% prac zawodników.

„Ponieważ zasada Fermata mówi, że czas przebiegu promienia jest najkrótszy, więc przyrównujemy do siebie czasy przelotu po różnych drogach". Czy to nie nazbyt karkołomny przeskok? Jeśli się nie rozumie dobrze jakiegoś pojęcia fizycznego, szczególnie takiego, które nie jest omawiane w programie szkolnym, a jedynie ma się o tym prawie mgliste wyobrażenia, to naprawdę lepiej nie opierać się na tych niepewnych wiadomościach, lecz przeczytać jeszcze raz treść zadania, a przede wszystkim ewentualną wskazówkę i zrobić zadanie w sposób elementarny, który w zadaniach olimpijskich nie tylko zawsze istnieje, ale z reguły jest najprostszy. Gorąco polecam przyszłym uczestnikom olimpiad fizycznych, którzy stanowią zapewne większość czytelników tej książki, wziąć sobie głęboko do serca powyższą radę.
Na zakończenie pokażemy jeszcze, jak zadanie to można rozwiązać



Rys. 3

korzystając jednocześnie z prawa Snelliusa. Sporządzamy w tym celu wyraźny rysunek (rys. 3), zaznaczając na nim kąt padania i kąt załamania promienia oraz pewne oczywiste fakty geometryczne. Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkąta ABF mamy:

$$\frac{\sqrt{x^2+(f-y)^2}}{\sin\alpha}=\frac{f-y+xctg\alpha}{\sin(180^\circ-\beta)} \tag{8}$$

Wiadomo z lekcji matematyki, że tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji (który na naszym rysunku wynosi 90° + α) równa się pochodnej funkcji w punkcie styczności:

$$tg(90^\circ+\alpha)=\frac{dx}{dy}=-\,ctg\alpha \tag{9}$$

Zastępując w proporcji (3) ctgα przez pochodną dostajemy następujący, czysto geometryczny związek:

$$\frac{x\frac{dx}{dy}-(f-y)}{\sqrt{x^2+(f-y)^2}}=-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \tag{10}$$

wyrażający fakt, że każdy promień światła równoległej wiązki po załamaniu pod kątem β w punkcie B przechodzi przez ustalone ognisko F. Korzystając teraz z prawa Snelliusa mówiącego, że stosunek sinusa kąta β do sinusa kąta α równa się współczynnikowi załamania, dostajemy równanie wiążące współrzędne x,y i pochodną $\frac{dx}{dy}$ funkcji x = x(y) opisującej kształt soczewki:

$$\frac{x\frac{dx}{xy}-(f-y)}{\sqrt{x^2+(f-y)^2}}=-n \tag{11}$$

Pamiętając, że zmienną niezależną jest y, nietrudno zauważyć, że lewa strona powyższego równania równa jest pochodnej po y z wyrażenia $\sqrt{[x(y)]+(f-y)^2}$. Pozwala to przepisać równanie (11) w postaci:

$$\frac{d}{dy}\left(\sqrt{[x(y)]^2+(f-y)^2}\right)=-n \tag{12}$$

Skoro wiemy, że pochodna po y funkcji $\sqrt{[x(y)]+(f-y)^2}$ równa się stałej liczbie - *n*, to możemy napisać najogólniejszą postać tej funkcji:

$$\sqrt{x^2+(f-y)^2}=-ny+C \tag{13}$$

gdzie C jest dowolną stalą. Stałą tę wyznaczymy z żądania, by krzywa opisująca kształt soczewki przechodziła przez punkt o współrzędnych x = r, y = 0. Daje to nam równanie

$$\sqrt{r^2+f^2}=C \tag{14}$$

Podstawiając wartość C ze wzoru (14) do równania krzywej, dostajemy ostatecznie

$$\sqrt{x^2+(f-y)^2}=-ny+\sqrt{r^2+f^2} \tag{15}$$

co jest identyczne z równaniem (6). Jak widzimy, powyższy sposób rozwiązania jest również znacznie trudniejszy od sposobu sugerowanego przez wskazówkę umieszczoną w treści zadania.