XXII OLIMPIADA FIZYCZNA (1972/1973). Stopień II, zadania teoretyczne – T2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej,
Olimpiady Fizyczne XXI i XXII, WSiP, Warszawa 1975

Autor: Andrzej Szymacha

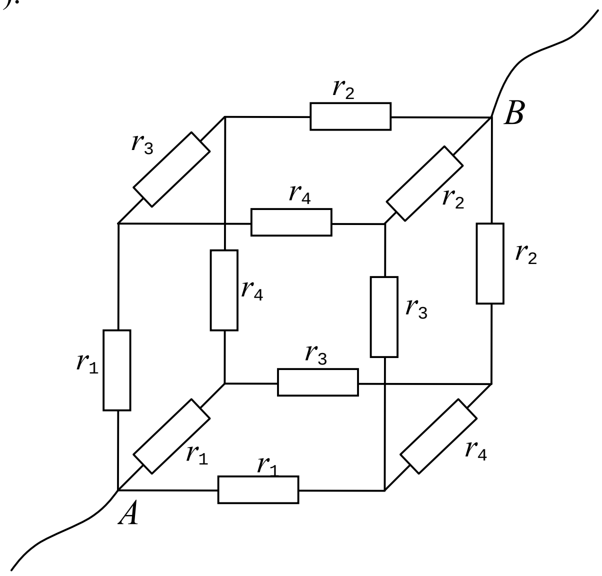
Nazwa zadania: Opór zastępczy układu oporników połączonych „w sześcian"

Działy: Elektryczność

Słowa kluczowe: opór, układ symetryczny, opór zastępczy, układ sześcienny oporników

Zadanie teoretyczne – T2, zawody II stopnia, XXII OF.

Oblicz opór zastępczy R_{AB} układu oporników połączonych „w sześcian" tak, jak na załączonym rysunku (rys. 1).

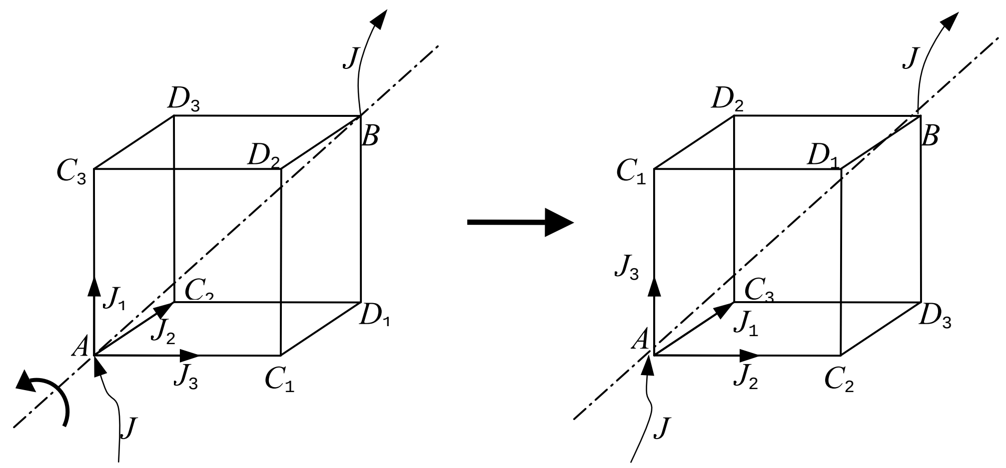


Rys. 1

Rozwiązanie

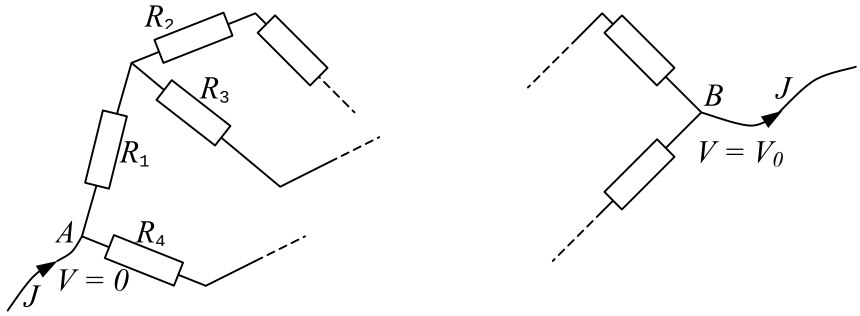
Bezpośrednia, ogólna metoda postępowania prowadziłaby w tym wypadku do układu wielu równań. Ich rozwiązanie byłoby zajęciem dość żmudnym. Istnieje jednak sposób znacznie prostszy, polegający na wykorzystaniu pewnej symetrii tego układu oporników. Zauważmy mianowicie, że obrót sześcianu o 120^o wokół osi AB przeprowadza wszystkie opory w nowe położenia, zajmowane poprzednio przez opory o identycznej wartości.

Przypuśćmy, że przez trzy opory wychodzące z wierzchołka A płyną przed obrotem prądy I_1, I_2, I_3, (Rys. 2a). W czasie obrotu wartość prądu w danym oporniku oczywiście nie ulega zmianie. Po obrocie dostaniemy więc sytuację przedstawioną na rysunku 2b. Zgodnie z zauważoną symetrią obwody elektryczne a i b są całkowicie nierozróżnialne.



Rys. 2a Rys. 2b

Możemy więc oba rozwiązania na wartości prądów zilustrowane rysunkami 2a i 2b traktować jako rozwiązania (przy tej samej różnicy potencjałów miedzy punktami *A* i *B*) dla tego samego (nie obróconego) układu oporów. Łatwo jednak przekonać się, że w dowolnym obwodzie elektrycznym złożonym z samych oporów omowych prądy płynące przez poszczególne opory są jednoznacznie określone przez przyłożoną różnice potencjałów i nie można być dwóch różnych rozwiązań na wartości płynących prądów. Wynika to z następującego ogólnego rozumowania.



Rys. 3

Załóżmy, że mamy dowolny schemat połączeń oporów omowych (Rys. 3) i że jakiś punkt *A* tego układu ma potencjał 0, a inny punkt *B* ma potencjał V_0. Niech przez opór *R* płynie prąd *I*, a przez przewód doprowadzający prąd *I*. Jeżeli potencjał V_0 zamienimy na $-V_0$ i wszystkie prądy $I, I_1,..., I_n$ zamienimy na prądy $-I$, $-I_1,..., -I_n$, to ze względu na liniowość i jednorodność równań Kirchhoffa i Ohma dostaniemy znów jakieś możliwe rozwiązanie dla tego obwodu.

Wyobraźmy sobie teraz, że przy danym potencjale V_0 mogłyby przez układ płynąć jakieś inne prąd $I', I'_1,..., I'_n$ różne od $I, I_1,..., I_n$. Znów na mocy liniowości układu suma rozwiązania z potencjałem $-V_0$ i prądami $-I, -I_1 ,..., -I_n$ oraz rozwiązanie z potencjałem V_0 i prądami $I', I'_1,..., I'_n$ byłaby nowym rozwiązaniem układu równań dla tego obwodu. Rozwiązanie to opisywałoby sytuację fizyczną, w której przyłożona była by różnica potencjałów V_0 - $V_0 = 0$, a płynące prądy byłby równe $I' - I, I'_1 - I_1,..., I'_n - I_n$. Jednakże po przyłożeniu zerowej różnicy potencjałów nie mogę w obwodzie składającym się z samych oporów omowych płynąć żadne prądy! Przeczyłoby to zasadzie zachowania energii. Skąd mianowicie miałoby się brać ciepło, które wydziela się na każdym z oporów? Oznacza to, że $I - I' = 0$,

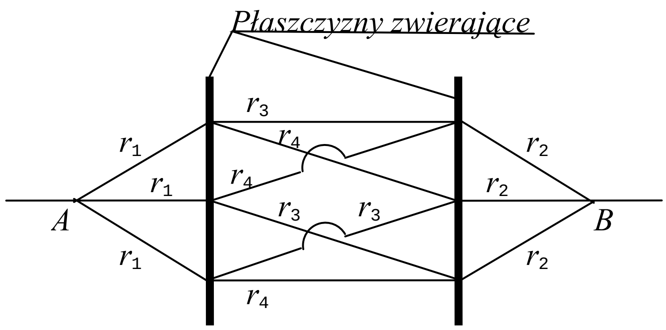
I_1 -I'_1 = 0,... itd., czyli nasze hipotetyczne inne rozwiązanie musi być identyczne z pierwotnym.

Udowodniliśmy całkiem ogólnie, że przyłożona różnica potencjałów wyznaczona jednoznacznie rozkład prądów płynących w obwodzie. Wróćmy jednak do naszego problemu i spójrzmy na rysunki 2a i 2b. Zgodnie z symetrią oba rysunki przedstawiają jeden i ten sam układ oporów, ale z różnymi rozwiązaniami. Na mocy udowodnionej jednoznacznie musi więc być:

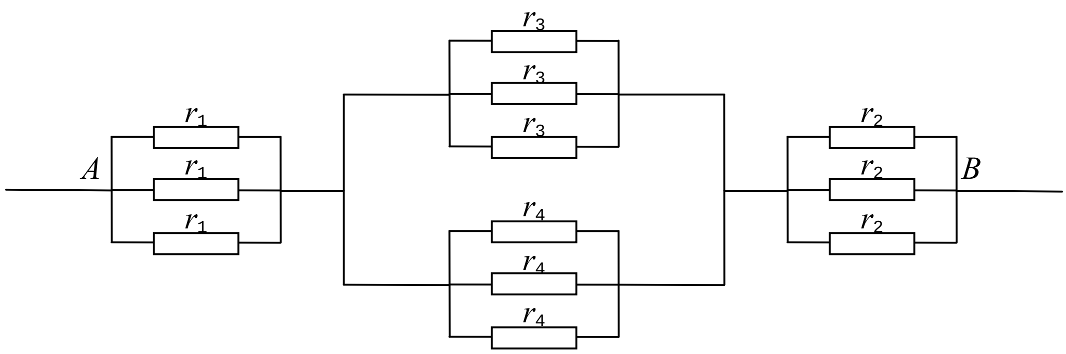
$$I_1 = I_3, \qquad I_2 = I_1, \qquad I_3 = I_2$$

Oznacza to, że wszystkie prądy I_1, I_2, I_3 są sobie równe! To samo odnosi się oczywiście do prądów płynących w gałęziach D_1B, D_2B, D_3B. Udowodniona równość prądów oznacza zarazem równość potencjałów w punktach C_1, C_2, C_3 oraz w punktach D_1, D_2, D_3. Wolno nam zatem wprowadzić dwie płaszczyzny idealnie przewodzące, jedną przechodzącą przez punkty C_1, C_2, C_3, drugą przechodzącą przez D_1, D_2, D_3. Sześcian nasz staje się wiec równoważny układowi (Rys. 4), który można jeszcze bardziej uprościć (Rys. 5).

Obliczenie oporu zastępczego układu z rysunku 5 można już wykonać w pamięci.



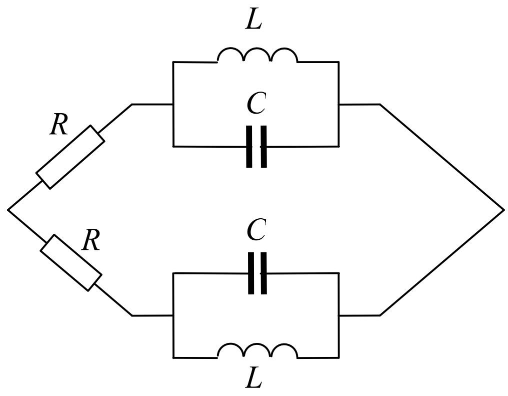
Rys. 4



Rys. 5

$$R_{AB} = \frac{r_1}{3} + \left(\frac{3}{r_3} + \frac{3}{r_4}\right)^{-1} + \frac{r_2}{3} = \frac{1}{3}\left(r_1 + r_2 + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}\right).$$

Na zakończenie jeszcze jedna uwaga. Otóż mogłoby się wydawać, że po udowodnieniu symetrii układu oporów wniosek o równości prądów w odpowiednich gałęziach jest oczywista, nie wymagający dalszego dowodu. Jednakże w ogólnym przypadku symetrycznego obwodu elektrycznego sytuacja nie jest tak prosta. Sama symetria układu nie musi automatycznie oznaczać symetrii sytuacji fizycznej. Można to mieć miejsce wtedy, gdy w danych warunkach zewnętrznych układu może znajdować się w co najmniej dwóch różnych stanach, innymi słowy, kiedy warunki zewnętrzne nie wystarczają do określenia wszystkich zjawisk zachodzących w układzie i trzeba na przykład znać jeszcze jego przeszłość. Najprostszym takim przykładem może być następujący obwód:



Rys. 6

Trudno odmówić symetrii temu układowi. Jednakże nawet jeśli układ ten jest w danej chwili całkowicie izolowany od otoczenia to nie mamy prawa twierdzić, że prąd płynący przez górną cewkę jest taki sam, jaki płynie przez dolną cewkę. Być może tuż przedtem, nim spojrzeliśmy na ten układ, ktoś naładował górny kondensator, a nie naładował dolnego. W tej sytuacji w oczku górnym wzbudzą się drgania, które – jeśli opór R jest wystarczająco duży – będą bardzo słabo tłumione i słabo przekazywane drugiemu obwodowi.