XXI OLIMPIADA FIZYCZNA(1971/1972) . Stopień III, zadanie teoretyczne – T3

Źródło: Olimpiady fizyczne XXI i XXII, WSiP Warszawa 1975

Autor: Andrzej Szymacha

Nazwa zadania: Obrót płytki

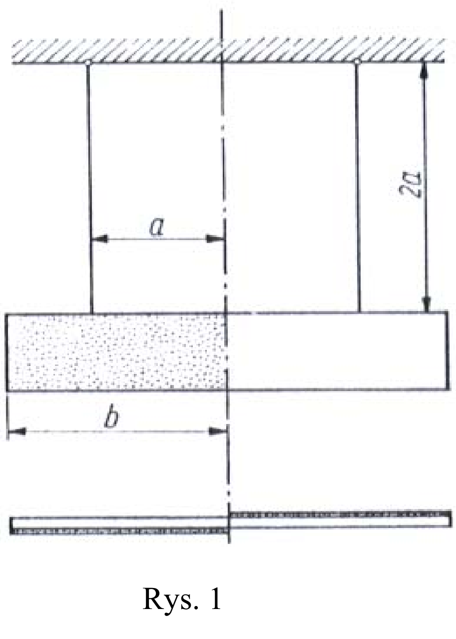
Działy: Mechanika

Słowa kluczowe: Ciśnienie gazu, prawdopodobieństwo, zderzenia sprężyste i niesprężyste, pęd, moment siły, moment obrotowy

Zadanie teoretyczne – T3, zawody III stopnia, XXIOF.

Płaską, cienką, prostokątną płytkę o masie *m* zawieszono pionowo (w sposób symetryczny) na dwóch nieważkich, nierozciągliwych nitkach tak, jak to pokazuje rysunek 1. Połowę powierzchni z każdej strony płytki pokryto aktywnym chemicznie metalem. Całość umieszczono w bańce szklanej, początkowo opróżnionej, do której w pewnym momencie wpuszczono gazowy chlor pod ciśnieniem *p*. Zakładając że, prawdopodobieństwo zajścia reakcji chemicznej przy zderzeniu cząsteczki chloru z metalem wynosi $P < 1$, oblicz kąt, o jaki obróci się płytka wokół osi pionowej w stanie równowagi.

Wskazówka. Przyjmijmy, że gęstość chloru jest praktycznie taka sama po obu stronach płytki, że spadek ciśnienia chloru w miarę zachodzenia reakcji jest zaniedbywanie mały i że powstający chlorek metalu pozostaje na płytce. Zakładamy również, że w okresie czasu, w którym prowadzimy obserwację, przereagowało na tyle mało chloru, że prawdopodobieństwo *P* i masę płytki *m* można uważać za stałe.



Rys. 1

Rozwiązanie

Fakt, że pewna część zderzających się z płytką cząsteczek chloru wchodzi w reakcję chemiczną oznacza, że zderzenia takie, nie będą sprężyste – jak w normalnym przypadku gazu obojętnego

– lecz będą zderzeniami niesprężystymi. Przy wyprowadzeniu zwykłego wzoru na ciśnienie gazu w zależności od jego gęstości i średniej energii kinetycznej (czyli temperatury) zakłada się, że zderzenia są sprężyste. W wyniku zderzenia niesprężystego zmiana pędu płytki jest z oczywistych powodów dwukrotnie mniejsza niż przy zderzeniu sprężystym. Wynika to z prostej arytmetyki

$$m v - 0 = \frac{1}{2}\left[m v - \left(- m v\right)\right].$$

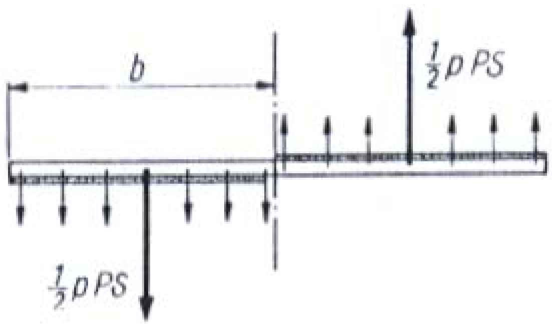
Zderzająca się cząstka zamiast odskoczyć z pędem – mv pozostaje na płytce z pędem zero. Gdyby wszystkie zderzenia były niesprężyste, wtedy ciśnienie chloru wywierane na metal byłoby dokładnie równe połowie ciśnienia wywieranego na ścianki naczynia (które oznaczamy p). Jeżeli zapiszemy ciśnienie p w postaci:

$$p = P * p + \left(1 - P\right)p,$$

gdzie P reprezentuje ułamek zderzeń niesprężystych w stosunku do wszystkich zderzeń, to jest jasne, że różnica między ciśnieniem wywieranym na szklaną stronę płytki (równym ciśnieniu wywieranemu na ścianki naczynia) a ciśnieniem wywieranym na obszar płytki pokryty metalem wyniesie

$$\frac{1}{2}pP.$$

Z tym niezrównoważonym ciśnieniem związana jest siła działająca na każdy element płytki. Siła ta skierowana jest od strony nie pokrytej metalem. Spoglądając na rysunek 2 widzimy, że całkowita siła działająca na płytkę równa jest zeru, różny od zera jest jedynie moment obrotowy starający się obrócić płytkę przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Siła działająca na każdą ze stron płytki nie jest skupiona w jednym czy dwóch punktach, lecz rozłożona w sposób ciągły; żeby znaleźć moment siły należałoby w zasadzie całkować.

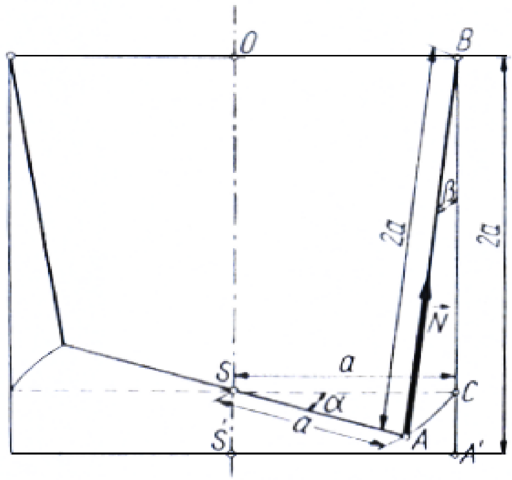


Rys. 2

Rozkład sił jest tu jednakże tak prosty, że możemy odwołać się do znanego i wielokrotnie w szkole wykorzystywanego twierdzenia: przy równomiernym rozkładzie siły wzdłuż belki czy płytki wypadkowy moment trzeba obliczać tak, jakby siła przyłożona była w połowie belki. Stosując powyższe twierdzenie do każdej z połówek płytki i oznaczając pole powierzchni połowy płytki przez S odczytujemy z rysunku, że całkowity moment sił obracający płytkę wynosi

$$M = \frac{1}{2}PpSb. \tag{1}$$

Rozumiemy już, dlaczego płytka zaczyna się obracać. Musimy jeszcze zrozumieć, co powstrzyma jej obrót, prowadząc w efekcie do ustalenia się pewnej równowagi. Otóż pamiętajmy, że linki utrzymujące ciężar płytki są cały czas napięte. Póki płytka wisi w najniższym położeniu, linki są ustawione pionowo, pionowe są też siły napięcia przyłożone do płytki. Ich moment obrotowy wynosi zero. W miarę obracania płytki zmienia się kierunek linek – siły napięcia, równoważące w dalszym ciągu ciężar płytki, zaczynają mieć różny od zera moment, starający się obrócić płytkę zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Moment ten zwiększa się ze wzrostem kąta, o który obróciła się płytka. Położenie równowagi, które mamy wyznaczyć, charakteryzuje się równością tego momentu obrotowego i momentu sił niezrównoważonego ciśnienia danego wzorem (1). Postarajmy się teraz obliczyć moment sil napięcia nitek. Ze względu na symetrię środek płytki (i środek krawędzi) będzie w trakcie obracania płytki jedynie się podnosił, pozostając cały czas na tej samej linii pionowej przechodzącej przez środek odcinka łączącego punkty zamocowania linek.



Rys. 3

Z równoramiennego trójkąta ASC mamy:

$$AC = 2a\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

Z prostokątnego trójkąta ABC

$$2a\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{2a} = \sin\frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = 2\beta. \tag{3}$$

Gdyby długość linek i ich odległość ni były specjalnie dobrane, to związek między kątami α i β nie byłby taki prosty. Nie jest to jednak powód do zmartwienia!

Pionowa składowa napięcia nici $N\cos\beta$ musi równoważyć połowę ciężaru płytki (pamiętajmy, że są dwie linki)

$$2N\cos\beta = mg. \tag{4}$$

Pozioma składowa napięcia N ma wartość $N\sin\beta$ i skierowana jest wzdłuż przyprostokątnej AC trójkąta ABC. Odcinek AC jest jednak również podstawą równoramiennego trójkąta ASC, zatem składowa pozioma siły N ma ramię równe wysokości trójkąta ASC, którą łatwo obliczyć:

$$\text{wysokość trójkąta ASC} == a\cos\frac{\alpha}{2}$$

Zatem moment obrotowy pochodzący od obu linek

$$M' = 2N\sin\beta * a\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{5}$$

Wyznaczając *N* z (4) i wstawiając do (5) dostajemy:

$$M' = 2\frac{mg}{2\cos\beta}\sin\beta * a\cos\frac{\alpha}{2} = mga\sin\beta = mga\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

Przyrównując teraz *M* dane wzorem (1) do *M'* danego wzorem (6) dostajemy warunek równowagi:

$$M = \frac{1}{2}PpSb = mga\sin\frac{\alpha}{2}, \tag{7}$$

skąd

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{PpSb}{2mga}.$$

Aby ten wzór miał sens, czyli by warunek równowagi (7) mógł być spełniony, musi być:

$$\frac{PpSb}{2mga} \le 1. \tag{8}$$

Zbadajmy sens tego warunku. Jeśli zaczniemy zwiększać moment obracający płytkę (np. zwiększając ciśnienie *p*) od niewielkiej wartości, przy której warunek (8) jest spełniony, to kąt skręcenia α będzie systematycznie rósł. Jednocześnie z kątem α rośnie kąt β. Jeśli popatrzymy na wzór (4), to widzimy, że rośnie też napięcie nici, przy czym dla $\frac{PpSb}{2mga} \to 1$ $\cos\beta \to 0$, a więc $N \to \infty$. Żadna z realnie istniejących nici nie jest absolutnie nierozciągliwa, ani nieskończenie wytrzymała. W rzeczywistości więc, albo nastąpi lekkie wydłużenie nici i nim β osiągnie $90°$, kąt α przekroczy $180°$ i nastąpi skrzyżowanie linek, albo po prostu linki ulegną zerwaniu.

Wysokość na jaką wzniesie wskutek obrotu środek ciężkości płytki łatwo wyznaczyć. Odczytujemy z rysunku 3, że wynosi ona

$$AC' = 2a - 2a\cos\beta. \tag{9}$$

Jeśli energię potencjalną płytki związaną z siłą ciężkości mierzyć od najniższego położenia, to mamy

$$E'_p = mgA'C = 4mga\sin^2\frac{\alpha}{4}. \tag{10}$$

Oprócz siły ciężkości, z którą związana jest energia potencjalna (10), na płytkę działa jeszcze stały moment obrotowy *M*, dany wzorem (1). Ze stałym momentem obrotowym można również związać energię potencjalną. Zdefiniujmy ją jako pracę sil potrzebnych do zrównoważenia owego stałego momentu i obrócenia płytki (wyobrażając sobie, że żadna inna siła nie działa). Ponieważ moment *M* działa w tym samym kierunku, w którym rośnie kąt α, więc przyłożona para sił wykona pracę ujemną. W czasie obrotu o kąt α każdy z punktów przyłożenia siły równoważącej przesunie się o $\frac{a}{2}\alpha$, a zatem praca dwóch takich sił będzie równa:

$$E = -2\frac{b}{2}\alpha * \frac{1}{2}PpS = -M\alpha. \tag{11}$$

Co można powiedzieć o położeniu równowagi znając energie potencjalne związane z wszystkimi siłami działającymi na układ? Oczywiste jest, że równowaga odpowiada położeniu, w którym całkowita energia osiąga minimum. Wyznaczmy to minimum przyrównując do zera pochodną sumy $E'_p + E_p$:

$$\frac{d}{d\alpha}[E'_p + E_p] = 0, \tag{12}$$

co po wykonaniu różniczkowania daje:

$$mga\sin\frac{\alpha}{2} - M = 0, \tag{13}$$

a więc to samo co równanie (7).
Przy okazji zyskujemy interpretację warunku minimum energii potencjalnej. Pochodna jednej energii, np. E'_p, równa jest momentowi siły związanemu poprzez napięcie linek z ciężarem płytki, a pochodna drugiej, to znaczy E_p, daje moment *M*. Znikanie sumy tych pochodnych oznacza (po uwzględnieniu oczywistej różnicy znaków) po prostu równość momentów w położeniu równowagi. Można udowodnić, że pochodna energii potencjalnej zależnej od pewnego kąta, jest w ogólnym przypadku równa momentowi siły związanej z tą energią potencjalną. Można by więc po prostu skorzystać wprost ze wzoru (10) do obliczenia *M'* i uzyskać warunek równowagi bez obliczania energii potencjalnej związanej z momentem *M*.