XXI OLIMPIADA FIZYCZNA (1971/1972). Stopień III, zadanie teoretyczne – T2.

Źródło: Olimpiady Fizyczne XXI i XXII, WSiP, Warszawa, 1975

Autor: Andrzej Szymacha

Nazwa zadania: Cząstka w polu elektrycznym i magnetycznym

Działy: Elektromagnetyzm

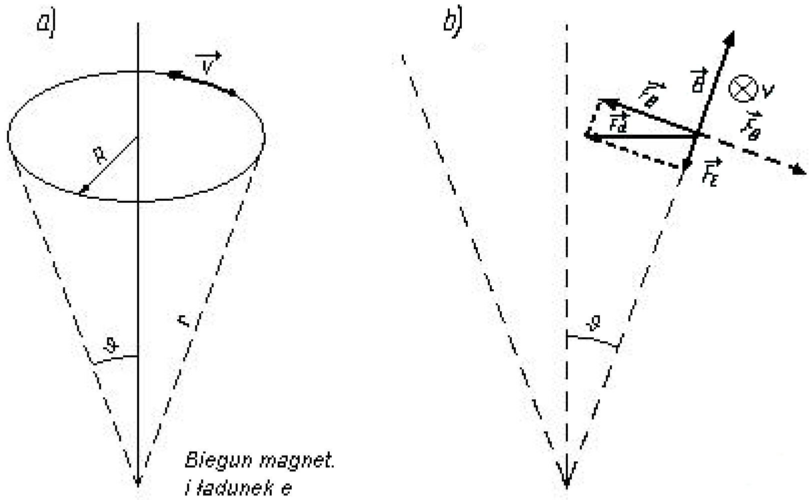
Słowa kluczowe: zjawisko Dopplera

Zadanie teoretyczne – T2, zawody III stopnia, XXI OF.

W polu elektrycznym i magnetycznym, wytworzonym przez znajdujące się w tym samym punkcie: punktowy ładunek elektryczny *e* i biegun długiego cienkiego magnesu, porusza się po orbicie kołowej punkt materialny o masie *m* i ładunku elektrycznym *–e*. Średnicę orbity kołowej – z punktu, w którym znajduje się ładunek i biegun wytwarzający pole – widać pod kątem 2ϑ. Przyjmijmy, że biegun magnetyczny wytwarza pole $\vec{B} = \frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$, gdzie α jest zadaną stałą. Wyznacz promień orbity.

Rozwiązanie

Promień orbity kołowej, o której mowa w treści zadania, wyznaczymy przyrównując wektorową sumę sił pola magnetycznego i elektrycznego do siły dośrodkowej potrzebnej do utrzymania cząstki w ruchu po okręgu. Z symetrii problemu wynika, że punkt, w którym znajdują się: ładunek +*e* i biegun magnetyczny, leży na osi przechodzącej przez środek orbity cząstki i prostopadłej do tej orbity (rys. 1a). Rysunek 1b



Rys. 1

przedstawia przekrój płaszczyzną, w której znajduje się cząstka w rozpatrywanej chwili czasu. Przyjmijmy, że $\alpha > 0$, $e > 0$. Ponieważ ładunek cząstki *–e* jest mniejszy od zera, to kierunek chwilowego prądu związanego z ruchem tej cząstki jest przeciwny do kierunku prędkości.

Gdyby więc prędkość była skierowana, „do nas”, wtedy zgodnie z regułą Fleminga na poruszającą się cząstkę działałaby siła $\vec{F}_B$ przedstawiona na rysunku. Niezależnie od wartości tej siły, siła całkowita $\vec{F}_E + \vec{F}_B$ musiałaby leżeć w ćwiartce płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{F}_E$ i $\vec{F}_B$. Z oczywistych powodów siła taka nie mogłaby zapewnić koniecznego przyspieszenia dośrodkowego. Nie ma natomiast żadnych kłopotów, jeśli przyjmiemy kierunek prędkości przeciwny do rozpatrzonego, to znaczy kierunek „za płaszczyzną rysunku”. Wypiszmy oczywiste związki geometryczne

$$\sin\vartheta = \frac{R}{r}, \tag{1}$$

$$\sin\vartheta = \frac{F_E}{F_d}, \tag{2}$$

$$\cos\vartheta = \frac{F_B}{F_d}, \tag{3}$$

II prawo dynamiki dla ruchu po okręgu

$$\frac{m v^2}{R} = F_d, \tag{4}$$

i wyrażenia na siły *FE* i *FB*

$$F_E = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{5}$$

$$F_B = e v B = e v \frac{\alpha}{r^2}. \tag{6}$$

W ostatnim wzorze skorzystaliśmy z podanej w treści zadania zależności pola *B* od odległości. Z wzorów (2), (3) oraz (5) i (6) dostajemy

$$ctg\,\vartheta = \frac{\dfrac{F_B}{F_d}}{\dfrac{F_E}{F_d}} = \frac{F_B}{F_E} = \frac{a v \cdot 4\pi\varepsilon_0}{e}.$$

Wzór powyższy pozwala obliczyć prędkość v w zależności od danego kąta ϑ

$$v = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} ctg\,\vartheta. \tag{7}$$

Prędkość tę wstawiamy teraz do równania (4), zastępując w nim jednocześnie siłę F_d wyrażeniem które uzyskujemy po skorzystaniu z wzoru (2) i (5). Dostajemy:

$$\frac{m}{R}\cdot\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0\alpha)^2}ctg^2\vartheta=\frac{F_E}{\sin\vartheta}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2\sin\vartheta}. \qquad (8)$$

W równaniu (8) niewiadome są już tylko promienie R i r. Znamy jednak związek między nimi. Pozostawiając z (1) $r=\dfrac{R}{\sin\vartheta}$ i skracając wielkości występujące po obu stronach równania (8), dostajemy:

$$\frac{m}{4\pi\varepsilon_0\alpha^2}ctg\,\vartheta=\frac{1}{\frac{R}{\sin\vartheta}}, \qquad (9)$$

skąd

$$R=\frac{4\pi\varepsilon_0\alpha^2}{m}\cdot\frac{\sin^3\vartheta}{\cos^2\vartheta}. \qquad (10)$$

Obliczmy jeszcze odległość r:

$$r=\frac{R}{\sin\vartheta}=\frac{4\pi\varepsilon_0\alpha^2}{m}tg^2\vartheta. \qquad (11)$$

Przeprowadziliśmy wszystkie rozważania przy założeniu $\alpha > 0$ i $e > 0$. Nietrudno zauważyć, że zmiana znaku obu tych wielkości równocześnie nie wprowadzi żadnych zmian w ruchu cząstki, a zmiana tylko jednej z tych wielkości spowoduje, że znaleziony przez nas okrąg obiegany będzie w przeciwnym kierunku. Wynika to również formalnie ze wzoru (7).

Niepokojący może wydawać się fakt, że ostateczny wynik zadania (wzór (10)) jest niezależny od ładunku e. Przecież zarówno siła elektrostatyczna, jak i siła, z jaką pole B działa na cząstkę, zależą obie od ładunku e – i to w różny sposób. Ten dziwny rezultat wynika stąd, że rozwiązany przez nas problem nie jest typowym zadaniem dynamiki, w którym należy wyznaczyć ruch i tor punktu w zależności od zadanych warunków początkowych i działających sił. Żeby to lepiej zrozumieć, wyobraźmy sobie inną sytuację. Mianowicie załóżmy, że ustawiliśmy cząstkę w określonej odległości r od źródła pola elektrycznego i magnetycznego i nadaliśmy jej pewną, określoną prędkość. Dla uproszczenia załóżmy, że prędkość ta nie jest całkiem dowolna, lecz prostopadła do odcinka łączącego położenie początkowe cząstki z centrum pola. Niech płaszczyzna rysunku będzie płaszczyzną zawierającą ten odcinek i niech będzie prostopadła do początkowej prędkości cząstki. Cząstka zacznie się poruszać i ruch ten będzie nie tylko zależny od wartości wszystkich parametrów określających nasz układ (tzn. α, e, r, v), ale na ogół nie będzie ruchem po okręgu. Wynika to najdobitniej ze związku między v i r, który możemy uzyskać eliminując kąt ϑ z równań (7) i (11). Dostajemy wtedy

$$v=\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}}. \qquad (12)$$

Jak wynika z naszych obliczeń, ruch po okręgu możliwy jest tylko wtedy , gdy początkowa prędkość ma dokładnie wartość daną powyższym wzorem. Oznacza to właśnie, że przy innej wartości prędkości ruch byłby bardziej skomplikowany. Ta szczególna wartość prędkości, którą musimy cząstce nadać, zależy od ładunku e.

Gdybyśmy ładunek e zmniejszyli na przykład dwukrotnie, to żeby otrzymać ponownie ruch po okręgu, o jakim mowa w treści zadania, musielibyśmy przy danej odległości r nadać cząstce dwukrotnie mniejszą prędkość. Siła elektrostatyczna zmniejszyłaby się czterokrotnie, siła magnetyczna – także (siła magnetyczna proporcjonalna jest do iloczynu ev), zatem ich siła wypadkowa nie zmieniłaby swego kierunku, a jedynie wartość. Zmiana ta też byłaby czterokrotna. Przy dwukrotnie mniejszej prędkości i tym samym promieniu R siła dośrodkowa musi być cztery razy mniejsza. Jak przed chwilą stwierdziliśmy, siła rzeczywiście zmalała cztery razy, a więc nowy ruch będzie ruchem po tej samej orbicie, choć z mniejszą prędkością. Ostatecznie, przekonujemy się, że kąt ϑ wyznaczony całkowicie przez r i R nie zmieni się w wyniku zmiany ładunku, mimo że zmienią się, prędkości i przyspieszenia.