XXI OLIMPIADA FIZYCZNA (1971-1972). Stopień III, zadanie teoretyczne – T1.

Źródło: XXI i XXII OLIMPIADA FIZYCZNA, WSiP, Warszawa 1975

Autor: Andrzej Szymacha,

Nazwa zadania: Dwa ciała i sprężynka

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: układ izolowany, siła ciężkości, twierdzenie o środku mas, ruch jednostajny prostoliniowy, prawo akcji i reakcji, I i II zasada dynamiki, drgania harmoniczne, masa zredukowana

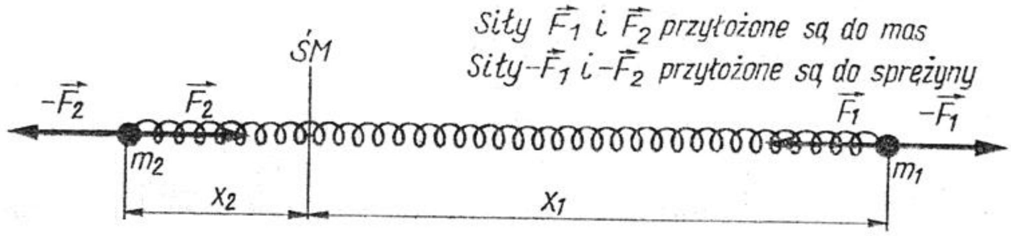
---

Zadanie teoretyczne – T1, zawody III stopnia, XXI OF.

Dwa nieduże ciała o masach m_1 i m_2 połączono jednorodną sprężyną o stałej sprężystości k i położono na poziomym gładkim stole. Sprężynkę rozciągnięto przez rozsunięcie obu ciał, a następnie oba ciała jednocześnie puszczono. Układ zaczął drgać wzdłuż linii prostej. Jakie to są drgania i jaki jest ich okres?

Rozwiązanie

Decydującą rolę w rozwiązaniu tego zadania odgrywa fakt, że układ dwóch mas wraz z łączącą je sprężynką jest w naszym zadaniu — z praktycznego punktu widzenia — układem izolowanym. Wprawdzie działają na niego siły ciężkości, ale są one całkowicie równoważone siłami reakcji podłoża, a jak wynika z treści zadania, tarcie można zaniedbać. Dla układów izolowanych obowiązuje, jak wiadomo, słynne twierdzenie o środku mas, mówiące że środek masy układu izolowanego pozostaje w spoczynku lub porusz się ruchem jednostajnym po linii prostej. Ponieważ w chwili zwalniania napiętej sprężynki obie masy i wszystkie punkty sprężynki miały prędkości równe zeru, więc i środek masy w tym momencie spoczywał. Dzięki powyższemu twierdzeniu wiemy, że będzie on spoczywał nieruchomo przez cały czas trwania ruchu, dopóki jakieś siły zewnętrzne nie zmienią tego stanu. Ponieważ jest to punkt nieruchomy, wygodniej będzie obliczyć położenie obu ciał



Rys. 1

właśnie od tego punktu. zgodnie z prawem akcji i reakcji, jeżeli sprężynka działa na masę m_1 siłą $\vec{F}_1$ to masa m_1 działa na sprężynkę siłą — $\vec{F}_2$. Podobnie na drugim końcu sprężynki — na masę m_2 działa siła $\vec{F}_2$, a na sprężynkę siła -$\vec{F}_2$.

Warto tu wspomnieć o częstym błędzie logicznym popełnianym przez bardzo wiele osób i to nie tylko uczniów szkół średnich, polegającym na stwierdzeniu, że na mocy III zasady dynamiki powinno być. To wcale nie prawda! W problemie takim, jak tu rozpatrywany, masy m_1 i m_2 wcale ze sobą bezpośrednio nie oddziałują! Związek $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ dostajemy dopiero w szczególnym przypadku granicznym, nie mającym nic wspólnego z III zasadą, mianowicie jeżeli założymy, że sprężynka jest nieważka. Wtedy z II zasady dynamiki mamy:

$$(\text{masa sprężynki} = 0) \cdot \text{przyspieszenie sprężynki} = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2$$

Ponieważ lewa strona jest równa zeru niezależnie od tego, jakie jest przyspieszenie sprężynki, to i prawa strona musi być równa zeru. Nieważkość sprężynki powoduje, że można o niej zapomnieć i traktować jako siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ jako oddziaływania między punktami materialnymi, zmieniającymi się według określonego prawa w zależności od odległości i spełniającymi III zasadę dynamiki.

O środku masy wiemy, że dzieli on odległość między ciałami w stosunku odwrotnym do mas ciał

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{m_1}{m_2}. \tag{1}$$

Wartość bezwzględna siły F_1 działającej na masę m_1 wynosi

$$F_1 = k(x_1 + x_2 - l_0) = k\left[x_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) - l_0\right], \tag{2}$$

gdzie l_0 jest długością nie napiętej sprężynki.

Siła działająca na drugą masę jest co do wartości bezwzględnej taka sama, jak siła F_1 (i jest tak samo zorientowana w stosunku do wychylenia x_2 jak siła F_1 w stosunku do wychylenia x_1), ale wygodniej będzie zapisać ją nieco inaczej

$$F_2 = k(x_1 + x_2 - l_0) = k\left[x_2\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) - l_0\right]. \tag{3}$$

Wprowadźmy teraz odchylenia do właściwego dla każdej masy położenia równowagi. Dla masy m_1 położenie równowagi ma współrzędną

$$x_{10} = \frac{l_0}{1 + \frac{m_1}{m_2}},$$

a dla masy m_2

$$x_{20} = \frac{l_0}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Oznaczając odchylenia od położeń równowagi symbolami Δx_1 i Δx_2, mamy

$$\Delta x_1 = x_1 - \frac{l_0}{1 + \frac{m_1}{m_2}}, \qquad \Delta x_2 = x_2 - \frac{l_0}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

Wyrażając siły F_1 i F_2 przez Δx_1 i Δx_2 oraz uwzględniając znak wynikający z prawa Hooke'a, mamy dla mas m_1 i m_2 następujące równania II zasady dynamiki Newtona

$$m_1 a_1 = -k\left[\left(\frac{l_0}{1+\frac{m_1}{m_2}} + \Delta x_1\right)\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) - l_0\right] = -k\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\Delta x_1 ,$$

$$m_2 a_2 = -k\left[\left(\frac{l_0}{1+\frac{m_2}{m_1}} + \Delta x_2\right)\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) - l_0\right] = -k\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\Delta x_2 , \tag{5}$$

gdzie a_1 i a_2 są przyspieszeniami mas m_1 i m_2. Równania (5) stanowią dwa niezależne równania drgań harmonicznych. Wyliczamy z nich okresy drgań zgodnie z ogólnym wzorem $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Dostajemy

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k\left(m_1+m_2\right)}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k\left(m_1+m_2\right)}} \tag{6}$$

Okazuje się, że oba okresy są równe, jak być powinno – gdyż inaczej środek masy nie mógłby być nieruchomy. Ich wspólna wartość jest po prostu okresem drgań naszego układu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m_1 m_2}{\left(m_1+m_2\right)}}{k}} \tag{7}$$

Wielkość

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{\left(m_1+m_2\right)} \tag{8}$$

nazywamy masą zredukowaną układu dwóch ciał. Wprowadzenie tej masy pozwala przepisać wzór (7) w postaci formalnie identycznej ze wzorem na okres drgań jednego ciała o masie μ będącego pod działaniem siły względnej, działającej między dwoma rzeczywistymi ciałami

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} . \tag{9}$$

Łatwo zauważymy, że początkowe wychylenia: Δx_1 w chwili $t = 0$ i Δx_2 w chwili $t = 0$, też muszą spełniać warunek (1), możemy więc napisać

$$\Delta x_1(0) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} A\,,$$

$$\Delta x_2(0) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} A\,,$$

gdzie *A* jest pewną dowolną stałą, zależną od stopnia początkowego rozciągnięcia sprężyny. Uwzględniając to, że ciał puszczone zostały bez prędkości początkowej, możemy napisać

$$\Delta x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} A \cos\frac{2\pi}{T} t\,,$$

$$\Delta x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cos\frac{2\pi}{T} t\,,$$

gdzie czas *t* liczony jest od momentu zwolnienia sprężynki.

Korzystając z definicji (4) możemy obliczyć x_1 i x_2:

$$x_1 = \frac{l_0}{1 + \frac{m_1}{m_2}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} A \cos\frac{2\pi}{T} t\,,$$

$$x_2 = \frac{l_0}{1 + \frac{m_2}{m_1}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cos\frac{2\pi}{T} t\,,$$

a w konsekwencji odległość między ciałami równą długości sprężynki

$$x = x_1 + x_2 = l_0 + A\cos\frac{2\pi}{T} t\,.$$

Pamiętając, że *T* zależy od masy zredukowanej, możemy nasz końcowy wynik skomentować następujący sposób. Gdybyśmy masę m_2 przyjęli za początek układu odniesienia (mimo że nie byłby to układ inercjalny), to wielkość *x* byłaby współrzędną masy m_1 w tym układzie odniesienia. Zmiana tej współrzędnej, czyli ruchu ciała o masie m_1 względem ciała o masie m_2 jest taki sam, jaki byłby ruch ciała o masie zredukowanej μ pod wpływem rzeczywistej siły *F* w prawdziwym już układzie inercjalnym. To zastąpienie masy m_1 przez masę zredukowaną koryguje całkowicie nieinercjalność układu odniesienia. Nietrudno zrozumieć, że jest to twierdzenie całkowicie ogólne dla dowolnego układu izolowanego dwóch ciał poruszającego się pod wpływem sił wewnętrznych spełniających prawo akcji i reakcji. Nosi ono nazwę twierdzenia o *redukcji zagadnienia dwóch ciał do zagadnienia jednego ciała* i znajduje powszechne zastosowanie w astronomii oraz w fizyce atomowej i jądrowej.

Jeśli gdzieś w podręczniku znajdziecie zadanie: „Przyjmijmy dla uproszczenia, że proton w atomie wodoru (lub Słońce w zagadnieniu Keplera) spoczywa w inercjalnym układzie odniesienia" – po czym następują jakiekolwiek obliczenia obarczone piętnem niedokładności, to pamiętajcie, że możecie ten błąd całkowicie skorygować zastępując w końcowych wzorach masę elektronu (czy też planety) masą zredukowaną rozpatrywanego układu dwóch ciał. Warto jeszcze zauważyć, że jeśli jedno z ciał (np. proton) ma masę dużo większą od drugiego (elektronu), a więc kiedy nieinercjalność układu z nim związanego jest mało istotna, to oczywiście różnica między masą zredukowaną a masą m_2 jest bardzo niewielka. Widać natychmiast, jeśli wzór (8) na masę zredukowaną przepiszemy w innej, często spotykanej postaci:

$$\mu = m_1 \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}.$$