**XXI OLIMPIADA FIZYCZNA (1971/1972). Etap II, zadanie teoretyczne – T2.**

**Źródło:** Olimpiady Fizyczne XXI i XXII, WSiP Warszawa, 1975

**Autor:** Andrzej Szymacha

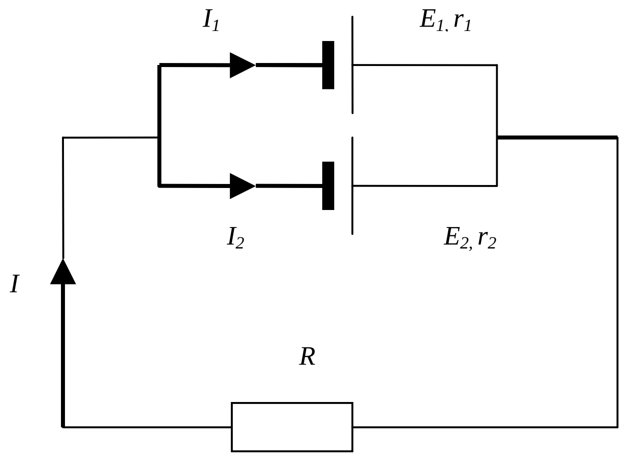
**Nazwa zadania**: Siła elektromotoryczna

**Działy:** Elektryczność

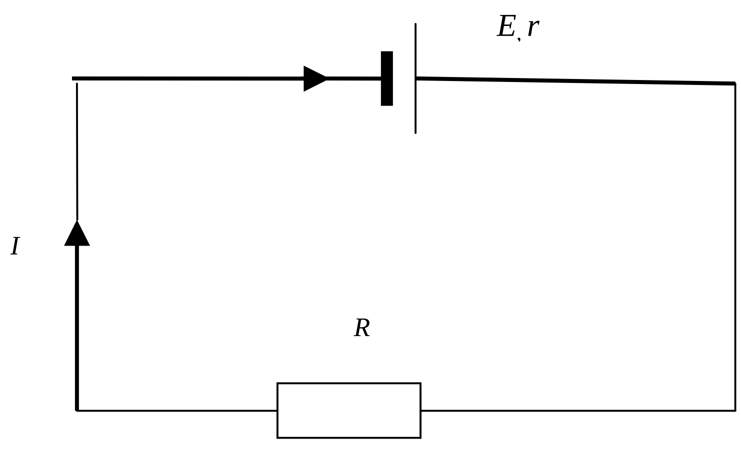
**Słowa kluczowe:** Siła elektromotoryczna, opór wewnętrzny, natężenie prądu

**Zadanie teoretyczne – T2, zawody II stopnia, XXI OF.**

Dwa ogniwa o siłach elektromotorycznych $E_1$ i $E_2$ i oporach wewnętrznych $r_1$ i $r_2$ (rys.1) chcemy zastąpić jednym ogniwem o sile elektromotorycznej $E$ i oporze wewnętrznym $r$ (rys. 2) tak, by natężenia prądu płynącego przez opór $R$ były w obu obwodach takie same,




Rys.1




Rys.2

niezależnie od wartości tego oporu. Jak $E$ i $r$ powinny zależeć od $E_1$, $E_2$, $r_1$ i $r_2$? Napisz wyrażenie na $E$ i $r$ w przypadku, gdy na początku byłyby nie dwa, lecz $n$ ogniw elektromotorycznych $E_1$, $E_2$,….,$E$n i oporach wewnętrznych $r_1$,$r_2$,…,$r_n$.

## Rozwiązanie

Obliczymy natężenie prądu płynącego przez opór $R$ w układzie przedstawionym na rys. 1. Oznaczając prąd płynący przez ogniwo 1 przez $I_1$, prąd płynący przez ogniwo 2 przez $I_2$, a prąd całkowity przez $I$, mamy z praw Kirchhoffa.

$$E_1 = I_1 r_1 + IR \tag{1}$$

$$E_2 = I_2 r_2 + IR \tag{2}$$

$$I = I_1 + I_2 \tag{3}$$

Wyznaczając z (1) i (2) prądy $I_1$ i $I_2$, a następnie do równania (3) dostajemy

$$I = \frac{E_1 - IR}{r_1} + \frac{E_2 - IR}{r_2} \tag{4}$$

Jest to jedno równanie z jedną niewiadomą $I$. Rozwiązaniem tego równania jest

$$I = \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}}{1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}}, \tag{5}$$

co najwygodniej przekształcić do postaci następującej:

$$I = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2} = \frac{E_1 \frac{r_2}{r_1 + r_2} + E_2 \frac{r_1}{r_1 + r_2}}{R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}. \tag{6}$$

Obliczenie prądu $I$ w obwodzie zastępczym nie nastręcza żadnych trudności – możemy to zrobić w pamięci otrzymując

$$I = \frac{E}{R + r}. \tag{7}$$

Wzory (5) i (6) powinny, zgodnie z warunkami zadania, przedstawić identyczne funkcje oporu $R$. Elementarne rozważania algebraiczne, które tu pomijamy, prowadzą do wniosku, że będzie to spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$E = E \frac{r_2}{r_1 + r_2} + E_2 \frac{r_1}{r_1 + r_2},$$

Opór ogniwa zastępczego jest więc zwykłym oporem zastępczym dwóch oporów połączonych równolegle, natomiast siła elektromotoryczna wyraża się przez $E_1$ i $E_2$ w sposób bardziej skomplikowany. Ponieważ każdy z ułamków

$$\frac{r_1}{r_1+r_2}, \quad \frac{r_2}{r_1+r_2}$$

jest mniejszy od jedności, a ich suma równa się jeden, to wielkość $E$ jest tak zwaną średnią ważoną sił elektromotorycznych $E_1$ i $E_2$. Współczynniki $\frac{r_1}{r_1+r_2}$ i $\frac{r_2}{r_1+r_2}$ nazywają się wagami, z jakimi $E_1$ i $E_2$ podlegają uśrednieniu. Nietrudno przekonać się, że siła elektromotoryczna $E$ jest większa od mniejszej z wielkości $E_1$ i $E_2$, a mniejsza od większej z tych wartości. Ponadto dla $E_1 = E_2$ średnia pokrywa się ze wspólną wartością sił elektromotorycznych. Są to powody, dla których taką specjalną kombinację $E_1$ i $E_2$ nazywa się średnią. Jeśli $r_1 = r_2$, to znaczy kiedy wagi $\frac{r_2}{r_1+r_2}$ i $\frac{r_1}{r_1+r_2}$ są równe, średnia ważona sprowadza się do zwykłej średniej arytmetycznej i jej wartość jest „równo oddalona" od wielkości $E_1$ i $E_2$.

Przejdźmy teraz do problemu uogólnienia otrzymanych wyników na przypadek $n$ ogniw. Z oporem zastępczym nie mamy kłopotu. Zgadujemy od razu, że powinno być

$$\frac{1}{r^{(n)}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n},$$

gdzie $r^{(n)}$ oznacza opór zastępczy $n$ ogniw.

W celu uogólnienia wzoru (7) na siłę elektromotoryczną $E$ musimy go nieco przekształcić, dzieląc licznik i mianownik każdego ze składników przez $r_1 r_2$. Otrzymujemy:

$$E = \frac{\frac{E_1}{r_1}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}} + \frac{\frac{E_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}.$$

Widać od razu, że w ogólnym przypadku powinno być:

$$E^{(n)} = \frac{\frac{E_1}{r_1}+\frac{E_2}{r_2}+\ldots+\frac{E_n}{r_n}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}},$$

gdzie symbolem $E^{(n)}$ oznaczaliśmy zastępczą siłę elektromotoryczną $n$ ogniw. Ścisły dowód, że tak istotnie musi być, najłatwiej przeprowadzić metodą *indukcji matematycznej*.

1. Wzory (9) i (11) słuszne są w sposób oczywisty dla $n$=2;mich wyprowadzeniu z praw Kirchhoffa poświęcona była właśnie pierwsza część zadania.

2. Zakładamy, że są one słuszne dla jakiegoś $n$ i rozpatrujemy układ złożony z $n$+1 ogniw.

Układ ten możemy znów traktować jako złożony z dwóch ogniw – jednego zastępujące go pierwsze $n$ ogniw i drugiego o sile elektromotorycznej $E_{n+1}$ i oporze wewnętrznym $r_{n+1}$. Stosując do tych dwóch ogniw wzory (8) i (10) (udowodnione bezpośrednio), w których zamiast $E_1$ wstawiamy zastępczą siłę elektromotoryczną pierwszych $n$ ogniw, a zamiast $E_2$ wstawiamy $E_{n+1}$, dostajemy:

$$E^{(n+1)} = \frac{\dfrac{E^{(n)}}{r^{(n)}} + \dfrac{E_{n+1}}{r_{n+1}}}{\dfrac{1}{r^{(n)}} + \dfrac{1}{r_{n+1}}} = \frac{\dfrac{\dfrac{E_1}{r_1} + \ldots + \dfrac{E_n}{r_n}}{r^{(n)}\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \ldots + \dfrac{1}{r_n}\right)} + \dfrac{E_{n+1}}{r_{n+1}}}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \ldots + \dfrac{1}{r_{n+1}}},$$

ale $r^{(n)}\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \ldots + \dfrac{1}{r_n}\right) = 1,$ więc ostatecznie

$$E^{(n+1)} = \frac{\dfrac{E_1}{r_1} + \dfrac{E_2}{r_2} + \ldots + \dfrac{E_n}{r_n} + \dfrac{E_{n+1}}{r_{n+1}}}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \ldots + \dfrac{1}{r_{n+1}}}.$$

Podobnie dla oporów zastępczych

$$\frac{1}{r^{(n+1)}} = \frac{1}{r^{(n)}} + \frac{1}{r_{n+1}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_{n+1}},$$

Co kończy dowód słuszności wzorów (9) i (11) dla dowolnego $n \geq 2$.