

XXI OLIMPIADA FIZYCZNA (1971/1972). Stopień I, zadanie teoretyczne – T3¹

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Andrzej Szymacha: *Olimpiady Fizyczne XXI i XXII*, WSiP, Warszawa 1975, str. 41 – 49;
Waldemar Gorzkowski: *Zbiór zadań z olimpiady fizycznej*. WSiP, Warszawa 1987,
zad. 6.2, str. 43, 152 – 156.

Nazwa zadania: Prędkość kulki staczającej się z równi pochyłej

Działy: Mechanika, dynamika

Słowa kluczowe: tarcie statyczne, kinetyczne, potoczyste, poślizgowe, współczynnik, prędkość liniowa, kątowa, ruch postępowy, obrotowy, prędkość, przyspieszenie, siła, II zasada dynamiki, moment bezwładności, kula, równia pochyła

Zadanie III teoretyczne – T3, zawody I stopnia, XXI OF

Na wierzchołku równi o wysokości h znajduje się kulka. Początkowe prędkości kulki (liniowa i kątowa) są równe zero. Współczynnik tarcia posuwistego (statycznego i kinetycznego) kulki o równię wynosi $f = \frac{2}{7}$. Współczynnik tarcia potoczystego kulki o równię równy jest zero.

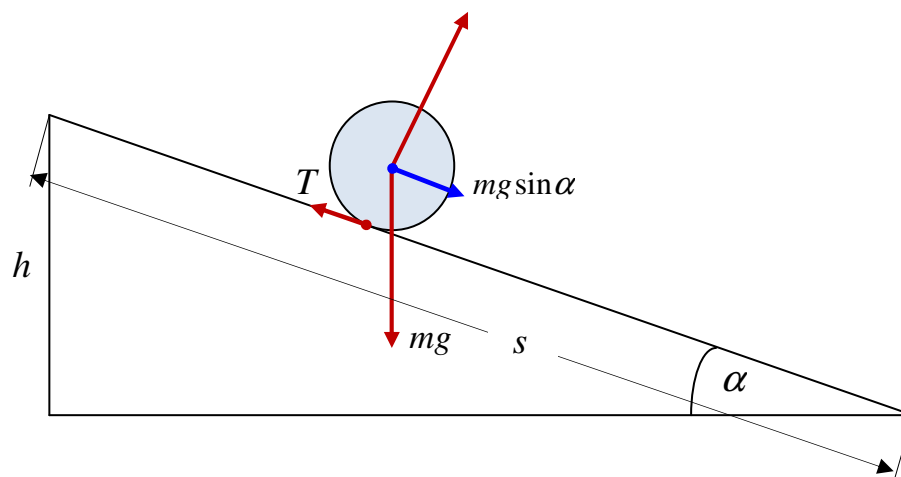
W pewnej chwili puszczamy kulkę. Jak końcowa prędkość liniowa kulki v (tj. prędkość środka kulki w chwili, gdy mija ona najniższy punkt równi) zależy od kąta nachylenia równi α ? Zrób szkic wykresu funkcji $v(\alpha)$.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia:

- T – siła tarcia (statycznego lub poślizgowego) między kulką a równią,
- N – siła nacisku między równią a kulką,
- v – prędkość liniowa środka kulki,
- a – przyspieszenie środka kulki,
- ω – prędkość kątowa kulki,
- ε – przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego kulki,
- I – moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez jej środek,
- m – masa kulki,
- R – promień kulki.

¹ Porównaj zadania o podobnej tematyce z olimpiad: XX OF; st. II – zad. teoretyczne T1: *Ruch kulki na równi bez poślizgu*; XXII OF, st. II – zad. doświadczalne: *Wyznaczanie współczynnika tarcia kulki stalowej o szkło*; VI Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna – zad. T1: *Ruch walców staczających się z równi*; XXIV OF, st. II – zad. dośw. D2 – dodatkowe: *Wyznaczanie współczynnika tarcia posuwistego rurki o równię*; XXVII OF, st. I – zad. T1: *Ruch kulki z równi pochyłej z uwzględnieniem tarcia potoczystego i posuwistego*; XXVII OF, st. III – zad. T2: *Opis ruchu kulki po poziomym stole z uwzględnieniem tarcia posuwistego i potoczystego*; XXX OF, st. I – zad. T4: *Analiza ruchu z równi pochyłej kulki z tarciem tocznym*; XXXI OF; st. wstępny – zad. dośw. D1: *Wyznaczanie współczynnika statycznego tarcia potoczystego stali o szkło*; LXV OF, st. II – zad. dośw.: *Wyznaczanie współczynnika tarcia tocznego kulki stalowej o gumę oraz momentu bezwładności kulki*.



Rys. 1. Zaznaczono siły działające na kulkę znajdującą się na równi pochyłej. Dwie siły przyłożone do środka kulki: ciężar kulki o wartości mg i siłę sprężystości równi prostopadłą do niej, skierowaną ku górze o wartości $mg \cos \alpha$ (tj. siłę reakcji na siłę nacisku N kulki na podłoże o wartości $N = mg \cos \alpha$, nie zaznaczonej na rys.). Wypadkowa tych dwóch sił jest siłą zsuwającą równoległą do równi skierowaną w dół równi o wartości $mg \sin \alpha$. Trzecią siłą działającą na kulkę jest siła tarcia posuwistego T przyłożona do punktu styczności kulki z podłożem równi i skierowana wzdłuż równi ku górze.

Przystępując do rozwiązania tego zadania należy uświadomić sobie że mogą tu, w zależności od wartości kąta α , wystąpić dwa zasadniczo różne przypadki: ruchu z poślizgiem i ruchu bez poślizgu. Postarajmy się zrozumieć najpierw poglądowo, dlaczego tak musi być. Zacznijmy od równi nachylonej pod bardzo małym kątem. Gdyby nie było tarcia to składowa siły ciężkości, równoległa do równi nadałaby kulce przyspieszenie $g \sin \alpha$. Kulka poruszałaby się ruchem postępowym, nie obracając się. Innymi słowy natychmiast po zwolnieniu kulki pojawiłaby się wolno rosnąca prędkość poślizgu. Jeśli jednak tarcie występuje, to sytuacja taka jest niemożliwa, gdyż natychmiast po rozpoczęciu ruchu pojawiłaby się duża siła tarcia $mg \cos \alpha$, większa od siły $mg \sin \alpha$ (przy dostatecznie małym kącie α) i przeciwnie do niej skierowana. Wypadkowa siły tarcia i siły $mg \sin \alpha$ byłaby skierowana przeciwnie do przyspieszenia, co jest jawnie sprzeczne z II zasadą dynamiki Newtona. Dla dostatecznie małych kątów α , w ruchu bez prędkości początkowej, nie może więc występować poślizg, lecz jedynie toczenie, w czasie którego prędkość punktu styczności kuli względem równi wynosi zero. Jeśli nie ma poślizgu, to tarcie jest tarcie statycznym, a jak wiemy siła tarcia statycznego nie jest określona jednoznacznie przez siłę nacisku i współczynnik tarcia – ich iloczyn wyznacza tylko maksymalną możliwą siłę tarcia. Czy można wyznaczyć ruch, skoro działa na ciało siła o nieustalonej wartości? Można, jeśli posiadamy dodatkowe wiadomości o ruchu. W naszym, przypadku będzie to warunek kinematyczny mówiący, że gdy $T < fN$, wtedy prędkość poślizgu równa $v - \omega R = 0$. Warunek toczenia bez poślizgu nie tylko pozwoli wyznaczyć ruch, ale i siłę tarcia potrzebną do tego, by ruch rzeczywiście spełniał ten warunek.

Wyobraźmy sobie teraz, że powtarzamy spuszczenie kulki po równi zwiększając stale kąt nachylenia. Przekonamy się, że ze wzrostem kąta nachylenia rosła też będzie wartość siły tarcia T niezbędna do zapewnienia staczania bez poślizgu. Dla pewnego kąta osiągniemy taką wartość siły T , która równa jest fN . Przy dalszym zwiększaniu kąta α siła T nie może już rosnąć, gdyż osiągnęła swą wartość maksymalną. Musi wystąpić poślizg i nie będziemy mogli korzystać z równania $v = \omega R$, a jedynie z nierówności $v - \omega R > 0$ wyznaczającej kierunek siły tarcia „pod górę”, a więc hamującej ruch. Znowu powstaje problem, bo gubimy jedno równanie. Ale natychmiast zyskujemy drugie! Skoro kula toczy się z poślizgiem, to siła tarcia jest wyznaczona przez nacisk: $T = fN$, a więc znowu będziemy mieli ilość równań wy-

starcząca do wyznaczenia ruchu. Po tej wyczerpującej analizie możemy przystąpić do obliczeń.

1. Toczenie bez poślizgu.

Prawo dynamiki dla ruchu postępowego:

$$ma = mgsin\alpha - T. \quad (1)$$

Prawo dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$I\varepsilon = TR. \quad (2)$$

Brak poślizgu:

$$v = \omega R \Rightarrow a = \varepsilon R. \quad (3)$$

Nierówność tarcia statycznego:

$$T \leq fmg\cos\alpha. \quad (4)$$

Z równań (1), (2) i (3) możemy wyznaczyć trzy wielkości: a , T i ε . W tym celu z równań (2) i (3) znajdujemy najpierw związek

$$\frac{Ia}{R^2} = T, \quad (5)$$

który wstawiamy do (1), otrzymując

$$ma = mg \sin\alpha - \frac{Ia}{R^2}, \quad (6)$$

stąd

$$a = \frac{mg \sin\alpha}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}} g \sin\alpha, \quad (7)$$

a po wstawieniu rozwiązania do (5)

$$T = \frac{1}{1 + \frac{mR^2}{I}} mg \sin\alpha. \quad (8)$$

Przekonujemy się, że istotnie T rośnie wraz z kątem α . Tarcie maksymalne zostaje osiągnięte dla kąta α_0 spełniającego równanie

$$T = \frac{1}{1 + \frac{mR^2}{I}} mg \sin\alpha_0 = fmg \cos\alpha_0, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = f \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right).$$

Rozwiązanie dane wzorem (7) obowiązuje więc dla kątów α spełniających warunek

$$\alpha \leq \operatorname{arctgf} \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right). \quad (10)$$

Dla tych wartości kątów możemy bez kłopotu obliczyć w elementarny sposób końcową prędkość kulki. Ponieważ długość równi wynosi $h/\sin\alpha$, a przyspieszenie dane jest wzorem (7). To ze związku

$$\frac{v^2}{2} = sa,$$

ślusznego ogólnie w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej, dostajemy:

$$v^2 = 2 \frac{h}{\sin \alpha} \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}} \quad \text{dla } \alpha \leq \alpha_0. \quad (11)$$

Zauważmy, że w przypadku toczenia bez poślizgu prędkość punktu, do którego przyłożona jest siła tarcia, wynosi zero – siłą tarcia nie wykonuje zatem pracy i do wyznaczenia prędkości końcowej moglibyśmy skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Uwzględnienie energii ruchu obrotowego prowadzi właśnie do charakterystycznego czynnika $1 + \frac{I}{mR^2}$ we wzorze (11), który poza tym jest podobny do wzoru dla spadku swobodnego $v^2 = 2gh$.

2. Toczenie z poślizgiem.

Równania (1) i (2) nie ulegają oczywiście zmianie. Zamiast równania (3) i nierówności (4) mamy w tym przypadku

$$v - \omega R > 0, \quad (12)$$

$$T = fmg \cos \alpha. \quad (13)$$

Podstawiając teraz znaną siłę T ze wzoru (13) do równań (1) i (2) dostajemy natychmiast:

$$a = g \sin \alpha - fg \cos \alpha \quad (14)$$

$$\varepsilon = \frac{fmgR \cos \alpha}{I}, \quad (15)$$

a więc zarówno ruch postępowy, jak i obrotowy są jednostajnie przyspieszone. Możemy wyznaczyć prędkości – liniową i kątową dla dowolnego czasu t :

$$v = t(g \sin \alpha - fg \cos \alpha),$$

$$\omega = t \frac{fmgR \cos \alpha}{I}.$$

Wstawiając znalezione rozwiązania do nierówności (12) dostajemy po skróceniu przez t

$$g \sin \alpha - fg \cos \alpha > \frac{fmgR \cos \alpha}{I} R$$

lub po uproszczeniu

$$\operatorname{tg} \alpha > f \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right). \quad (16)$$

Oczekiwaliśmy na podstawie dyskusji jakościowej, że warunek na toczenie z poślizgiem będzie przeciwny do warunku na toczenie bez poślizgu, ale nie zaszkodziło się o tym przekonać. Obliczenie prędkości końcowej nie nastęrczy także teraz żadnych kłopotów skoro znamy przyspieszenie i przebyta odległość.

$$v^2 = \frac{2hg}{\sin \alpha} (\sin \alpha - f \cos \alpha) = 2hg (1 - f \operatorname{ctg} \alpha) \quad \text{dla } \alpha < \alpha_0. \quad (17)$$

Aby zrobić szkic wykresu, musimy podstawić wartość momentu bezwładności. W zadaniu tego typu uczeń może skorzystać ze znanego wzoru na moment bezwładności kuli bez wyprowadzenia. Podstawiając $I = \frac{2}{5}MR^2$ oraz wartość $f = \frac{2}{7}$ do wzorów (9), (11) i (17) dostajemy:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{2}{7} \left(1 + \frac{1}{\frac{2}{5}} \right) = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 45^\circ,$$

$$v^2 = \frac{10}{7} gh \quad \text{dla } \alpha \leq 45^\circ, \quad (18)$$

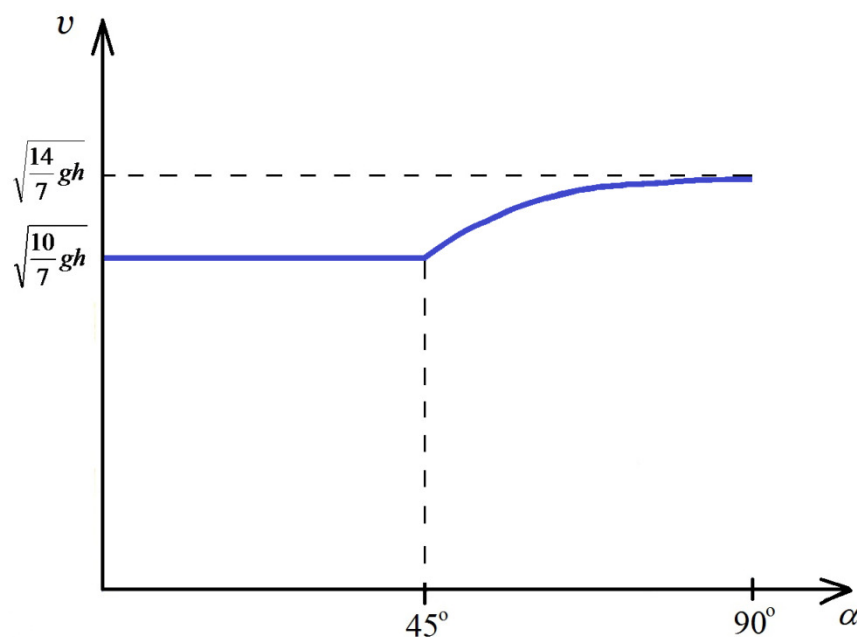
$$v^2 = 2gh \left(1 - \frac{2}{7} \operatorname{ctg} \alpha \right) \quad \text{dla } \alpha > 45^\circ. \quad (18')$$

Nietrudno przekonać się, że wzory (18) i (18') przedstawiają funkcję ciągłą. Istotnie, przechodząc w drugim wzorze do granicy $\alpha \rightarrow 45^\circ$ dostajemy:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 45^\circ} 2gh \left(1 - \frac{2}{7} \operatorname{ctg} \alpha \right) = \frac{10}{7} gh,$$

a więc tyle samo, ile daje wzór (18) obowiązujący dla $\alpha \leq 45^\circ$. Mimo ciągłości, na wykresie będzie charakterystyczne załamanie, gdyż część wykresu jest oczywiście odcinkiem równoległym do osi α , a część funkcją rosnącą od wartości $\sqrt{\frac{10}{7}} gh$ dla $\alpha = 45^\circ$, do wartości $\sqrt{2gh}$ dla $\alpha = 90^\circ$. Szkic wykresu przedstawia rys. 2

Mogłoby się na pierwszy rzut oka wydawać, że wynik jest sprzeczny z zasadą zachowania energii. Przecież dla wszystkich kątów α wysokość h , a więc i zmiana energii potencjalnej, jest ta sama. Dla $\alpha < 45^\circ$ żadna część tej energii nie rozprasza się na ciepło (siła tarcia nie wykonuje pracy, gdy nie ma poślizgu), a mimo to końcowa prędkość jest mniejsza dla małych kątów niż dla kątów, przy których na pewno część energii mgh zamienia się na ciepło! Pamiętać musimy jednak jeszcze o energii ruchu obrotowego. Dla kątów $\alpha < 45^\circ$ jest ona stałym ułamkiem energii ruchu postępowego, a dla kątów większych zaczyna szybko maleć. Jej ubytek jest większy, niż wzrost energii kinetycznej ruchu postępowego, a więc wydzielające się ciepło jest dodatnie, o czym można przekonać się stosując wprowadzone wzory. Nie będziemy już tego robić, sprawdzimy jedynie spoglądając na wzór (18), że dla $\alpha = 90^\circ$, kiedy zniknie nacisk (kula spada po prostu obok pionowej deski), czyli kiedy znika i tarcie i ruch obrotowy, wtedy energia kinetyczna ruchu postępowego równa się po prostu mgh .



Rys.2. Wykres zależności prędkości v kulki puszczonej z równi pochyłej z wysokości h w zależności od kąta nachylenia α równi do poziomu. Współczynnik tarcia posuwistego (statycznego i kinetycznego) kulki o równię wynosi $f = 2/7$. Współczynnik tarcia potoczystego kulki o równię równy jest zeru.

Dodatek – moment bezwładności kuli

Przedstawimy tu dowcipny sposób znalezienia wzoru na moment bezwładności kuli nie odwołując się do całkowania, a jedynie korzystając z podstawowej definicji momentu bezwładności jako odpowiedniej sumy obejmującej wszystkie punkty materialne, na jakie faktycznie lub w wyobraźni podzielić możemy bryłę:

$$I = \sum m_i r_i^2, \quad (19)$$

oraz z pewnych argumentów symetrii.

Ze wzoru (19) jasno wynika, że moment bezwładności kuli musi być proporcjonalny do jej całkowitej masy i kwadratu promienia

$$I = \gamma MR^2. \quad (20)$$

Celem obliczeń jest ustalenie wartości współczynnika liczbowego γ . Aby to zrobić, obliczmy najpierw moment bezwładności bardzo cienkiej powłoki kulistej o masie m i promieniu R . Wprowadzając układ współrzędnych prostokątnych z osią Oz skierowaną wzdłuż osi obrotu, możemy moment tej powłoki I_p zapisać w postaci:

$$I_p = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (21)$$

gdzie x_i oraz y_i są współrzędnymi i -tego punktu. Fakt, że $x_i^2 + y_i^2 = r_i^2$, jest jeszcze jednym zastosowaniem prawa Pitagorasa. Jeśli chwilę pomyślimy, to natychmiast zrozumiemy, że ze względu na symetrię powłoki kulistej, to znaczy ze względu na geometryczne równouprawnienie wszystkich trzech osi, musi być spełniona następująca równość:

$$\sum m_i x_i^2 = \sum m_i y_i^2 = \sum m_i z_i^2. \quad (22)$$

Oznaczmy wspólną wartość tych sum literą A . Mamy:

$$3A = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 + \sum m_i z_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \quad (23)$$

ale $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = R^2$ dla wszystkich punktów powłoki! Zatem:

$$3A = R^2 \sum m_i = mR^2,$$

skąd

$$A = \frac{1}{3} mR^2. \quad (24)$$

Wracając do wzoru (21) mamy

$$I_p = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = 2A,$$

czyli

$$I_p = \frac{2}{3} mR^2. \quad (25)$$

Znając ten wzór będziemy mogli wyznaczyć γ we wzorze (20).

Rozpatrzmy w tym celu powłokę kulistą o skończonej grubości ε i zewnętrznym promieniu R . Jeżeli jest ona wykonana z materiału o gęstości ρ , to jej masa wynosi:

$$m = \left[\frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi (R - \varepsilon)^3 \right] \rho, \quad (26)$$

a moment bezwładności równy jest różnicy momentu bezwładności kuli o promieniu R i kuli o promieniu $R - \varepsilon$, z których każdą wykonano z materiału o tej samej gęstości co powłokę. Korzystając ze wzoru (20) znajdujemy moment bezwładności dla naszej powłoki (oznaczamy go symbolem $I_p(\varepsilon)$):

$$I_p(\varepsilon) = \gamma \rho \frac{4}{3} \pi R^3 R^2 - \gamma \rho \frac{4}{3} \pi (R - \varepsilon)^3 (R - \varepsilon)^2 = \frac{4}{3} \pi \rho \gamma [R^5 - (R - \varepsilon)^5]. \quad (27)$$

Korzystając z (26), wyeliminujemy z powyższego wzoru gęstość materiału ρ

$$\begin{aligned} I_p(\varepsilon) &= \gamma m \frac{R^5 - (R - \varepsilon)^5}{R^3 - (R - \varepsilon)^3} = \\ &= \gamma m \frac{\varepsilon [R^4 + R^3(R - \varepsilon) + R^2(R - \varepsilon)^2 + R(R - \varepsilon)^3 + (R - \varepsilon)^4]}{\varepsilon [R^2 + R(R - \varepsilon) + (R - \varepsilon)^2]}. \end{aligned} \quad (28)$$

W otrzymanym wzorze możemy przejść do granicy z $\varepsilon \rightarrow 0$, dostaniemy wtedy moment bezwładności powłoki o zerowej grubości. Moment ten już obliczyliśmy wcześniej. Porównując wzór (25) z granicą, do której dąży prawa strona wzoru (28), dostajemy:

$$\frac{2}{3} mR^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma m \frac{R^4 + R^3(R - \varepsilon) + R^2(R - \varepsilon)^2 + R(R - \varepsilon)^3 + (R - \varepsilon)^4}{R^2 + R(R - \varepsilon) + (R - \varepsilon)^2}.$$

Obliczenie granicy jest wyjątkowo proste, gdyż polega po prostu na podstawieniu $\varepsilon = 0$. Dostajemy:

$$\frac{2}{3} mR^2 = \gamma m \frac{5R^4}{3R^2},$$

czyli

$$\gamma = \frac{2}{5}. \quad (29)$$

Ostatecznie udowodniliśmy, że moment bezwładności kuli wyraża się wzorem

$$I = \frac{2}{5} MR^2.$$