

**XXI OLIMPIADA FIZYCZNA (1971/1972). Stopień I, zadanie doświadczalne – D.**

**Źródło:** Komitet Główny Olimpiady Fizycznej,  
Andrzej Szymacha: Olimpiady Fizyczne XXI i XXII. WSiP, Warszawa 1975.

**Nazwa zadania:** Badanie drgań wahadła w wodzie.

**Działy:** Mechanika

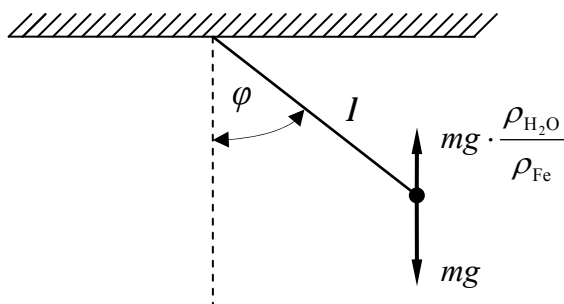
**Słowa kluczowe:** okres drgań, siła wyporu, ciężar właściwy, gęstość, tłumienie

**Zadanie doświadczalne – D, zawody I stopnia, XXI OF.**

Zmierz okres drgań stosunkowo masywnego ciała żelaznego o kształcie w miarę opływowym (np. główki młotka), zawieszono na długiej nici i zanurzonego w wodzie (np. w wannie lub dużej miednicy odpowiednio ustawionej). Zastanów się, czy wykonany pomiar okresu wahań może służyć do wyznaczenia stosunku ciężaru właściwego żelaza do ciężaru właściwego wody.

**Rozwiązanie****Część teoretyczna**

Narzuca się myśl, że obecność siły wyporu powinna zmienić wartość okresu drgań wahadła zanurzonego w cieczy w porównaniu z okresem drgań tego samego wahadła w powietrzu.



Rys. 1

Przyjmijmy więc na razie, że jest to jedyna siła, którą trzeba uwzględnić (obok, oczywiście, siły ciężkości). Równanie ruchu przyjmie postać

$$ma = mg \left( 1 - \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}} \right) \sin \varphi. \quad (1)$$

Równanie ruchu wahadła w powietrzu (czyli praktycznie w próżni) jest

$$ma = mg \sin \varphi. \quad (2)$$

Różnica między nimi polega jedynie na tym, że współczynnik  $g$  w równaniu (2) zastąpiony został współczynnikiem  $g \left( 1 - \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}} \right)$ .

Tak więc:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g \left(1 - \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}}\right)}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}. \quad (3)$$

Dzieląc stronami oba powyższe równania i podnosząc do kwadratu dostaniemy:

$$1 - \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}} = \frac{T^2}{T'^2},$$

co po prostym przekształceniu można zapisać w postaci:

$$\rho_{\text{Fe}} = \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{1 - \frac{T^2}{T'^2}}. \quad (4)$$

### Część doświadczalna

Pomiar wykonany dla zwykłego młotka zawieszono na sznurku o długości ponad 1 m dał w wyniku

$$\frac{T^2}{T'^2} = \left(\frac{24}{27}\right)^2 = 0,79,$$

co po podstawieniu do (4) prowadzi do gęstości względnej żelaza

$$\rho_{\text{Fe}} = \frac{1}{0,21} = 4,8.$$

Jest to wynik różniący się znacznie od rzeczywistej wartości gęstości żelaza równej 7,8 – 7,9 (w zależności od obróbki). W tej sytuacji nie warto zajmować się nawet oszacowaniem błędu przypadkowego pomiaru, gdyż jest jasne, że poważny błąd musi tkwić w samej metodzie. Być może zaniedbanie oporu lepkiego wody wprowadziło tak duży błąd? Postarajmy się oszacować wpływ tego czynnika.

Rozważmy w tym celu ruch ciała, na które działają dwie siły – siła proporcjonalna do wychyleń, pod wpływem której ciało wykonywałoby drgania z częstością  $\omega_0$ , i siła oporu lepkiego proporcjonalna do prędkości. Równanie ruchu tego ciała ma postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \alpha \frac{dx}{dt}, \quad (5)$$

gdzie  $\alpha$  jest pewną stałą charakteryzującą wielkość oporu. Nie będziemy tu stosowali ogólnej metody rozwiązania takiego równania, która przekracza niewątpliwie możliwości ucznia, ale postaramy się wyciągnąć pewne wnioski odwołując się częściowo do doświadczenia.

Z doświadczenia wiadomo, że równanie takie opisuje drgania tłumione o amplitudzie malejącej w czasie. Zastanówmy się, czy można na podstawie bardzo ogólnych argumentów wykazać, jaki musi być charakter tych zmian. Wyobraźmy sobie, że wychyliliśmy punkt materialny do położenia  $x_1$  i puściliśmy go swobodnie. Po wykonaniu pełnego wahnięcia punkt powróci do położenia odległego od środka drgań o jakieś  $x_2 < x_1$ . Rozpoczyna się nowy cykl ruchu, tym razem z wychyleniem początkowym  $x_2$ , który zakończy się w położeniu  $x_3$ . Co można powiedzieć o  $x_3$ ? Wyobraźmy sobie, że przytrzymałmy na chwilę wahadło w położeniu  $x_2$  i zmieniliśmy na świecie

układ jednostek, mianowicie skróciliśmy długość wzorca metra w proporcji  $\frac{x_2}{x_1}$ . Liczba wyrażająca w rzeczywistości mniejszą długość  $x_2$  będzie w nowym systemie miar równa liczbie opisującej długość  $x_1$  w starym systemie miar. W nowym układzie skala czasu pozostaje ta sama – nie zmieni się więc  $\omega_0$ . Nie zmieni się również współczynnik  $\alpha$  mający podobnie jak  $\omega_0$  wymiar  $s^{-1}$ . Nie zmieni się więc i równanie (5). W nowej sytuacji mamy rozwiązać identyczne z przypadkiem poprzednim równanie z identycznym (liczbowo – choć nie fizycznie) wychyleniem początkowym. W wyniku – jako końcowe wychylenie, po wykonaniu pełnego wahanca, musimy dostać tę samą co poprzednio liczbę  $x_2$ , opisującą odległość  $x_3$  w nowym układzie miar. Odległość ta po powrocie do zwykłego systemu metrycznego wyrazi się liczbą mniejszą od  $x_2$  o czynnik zmiany skali  $\frac{x_2}{x_1}$ .

Ostatecznie

$$x_3 = x_2 \frac{x_2}{x_1},$$

czyli

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Rozumowanie powyższe odnosi się do każdych 3, kolejnych wychyleń – dochodzimy więc do wniosku, że kolejne amplitudy maleć muszą w postępie geometrycznym. Amplitudy te są zarazem wychyleniami w kolejnych czasach rosnących według postępu geometrycznego. Oznaczając  $n$  – tą amplitudę symbolem  $A_n$ , a iloraz postępu literą  $q$ , można napisać

$$A_n = x(nT) = x_1 q^{-n} = x_1 q^{\frac{-nT}{T}}.$$

Zastępując wyrażenie  $nT$  czasem bieżącym  $t$ , możemy napisać równanie słuszne jedynie dla czasów  $t$  będących wielokrotnością okresu  $T$

$$x(t) = x_1 q^{\frac{-t}{T}}.$$

Korzystając ze znanego wzoru  $a^b = c^{b \ln_c a}$  słusznego dla dowolnego  $c > 0$  i wybierając dla wygodu  $c = e$  (równe podstawie logarytmów naturalnych) możemy napisać

$$q^{\frac{-t}{T}} = e^{\frac{-t}{T} \ln q} = e^{-\lambda t},$$

gdzie  $\lambda$  jest nową stałą zastępującą i tak nie wyznaczoną na razie stałą  $q$ .

A co można powiedzieć o wychyleniu pomiędzy chwilami czasu  $nT$  i  $(n+1)T$ ? Przyjmijmy dość naturalne założenie, które za chwilę potwierdzimy, że w tych chwilach pośrednich amplitudę  $A(t)$  trzeba pomnożyć przez funkcję  $\cos \omega t$  opisującą drgania harmoniczne:

$$x(t) = x_1 e^{-\lambda t} \cos \omega t. \quad (6)$$

Teraz należy wstawić tę postać funkcji do równania (5) i sprawdzić, czy można tak dobrać stałe  $\lambda$  i  $\omega$ , by równanie to było istotnie spełnione. Pozwoli to nam nie tylko przekonać się o słuszności rozumowania prowadzącego do (6), ale i wyznaczyć nową częstość  $\omega$  i stałą tłumienia  $\lambda$ .

Obliczamy pochodne:

$$\frac{dx}{dt} = -x_1 \lambda e^{-\lambda t} \cos \omega t - \omega x_1 e^{-\lambda t} \sin \omega t,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x_1 \lambda^2 e^{-\lambda t} \cos \omega t + 2x_1 \omega \lambda e^{-\lambda t} \sin \omega t - x_1 \omega^2 e^{-\lambda t} \cos \omega t$$

i wstawiamy do równania (5). Dostajemy:

$$x_1 e^{-\lambda t} [\lambda^2 \cos \omega t - 2\omega \lambda \sin \omega t - \omega^2 \cos \omega t] =$$

$$= -\omega_0^2 x_1 e^{-\lambda t} \cos \omega t + \alpha x_1 \lambda e^{-\lambda t} \cos \omega t + \alpha \omega x_1 e^{-\lambda t} \sin \omega t.$$

Po podzieleniu obu stron przez  $x_1 e^{-\lambda t}$  i uporządkowaniu, dostajemy

$$(\lambda^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \alpha \lambda) \cos \omega t + (2\omega \lambda - \alpha \omega) \sin \omega t = 0.$$

Równanie to będzie spełnione we wszystkich chwilach czasu wtedy i tylko wtedy, gdy oba nawiasy stojące przy funkcjach  $\sin \omega t$  i  $\cos \omega t$  będą z osobna równe zero. Dostajemy:

$$\lambda = \frac{\alpha}{2},$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2. \quad (7)$$

Ostatni wzór świadczy o tym, że uwzględnienie siły oporu prowadzi nie tylko do zmniejszania się z upływem czasu amplitudy, ale i do zmiany częstości drgań  $\omega$  w porównaniu z wartością  $\omega_0$  dla oscylatora nietłumionego.

Wróćmy teraz do naszego młotka. Jakościowa obserwacja wskazuje, że po jednym okresie amplituda zmniejsza się nie więcej niż o 2 – 3%. Przyjmijmy dla większej pewności nawet 10%. Oznacza to, że

$$e^{-\lambda t} > 0,9$$

czyli

$$\lambda t < \ln 10 - \ln 9 \approx 2,30 - 2,20 = 0,1. \quad (8)$$

Równanie (7) możemy przepisać w postaci:

$$\lambda^2 = \omega_0^2 - \omega^2 = 4\pi \left( \frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2} \right),$$

co po pomnożeniu przez  $T^2$  daje

$$\lambda^2 T^2 = 4\pi \left( \frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right).$$

Korzystając z oszacowania (8) dostajemy

$$\frac{T^2}{T_0^2} - 1 = \frac{(\lambda T)^2}{4\pi^2} < \frac{0,01}{4\pi^2} \approx 0,00025.$$

Przekonujemy się, że wpływ tłumienia na okres wahań jest w naszym przypadku całkowicie zaniedbywalny. Nie tłumienie jest więc przyczyną poważnej rozbieżności między wartością gęstości żelaza wyznaczoną przez nas a wartością tablicową.

Jest jeszcze jeden czynnik całkowicie przez nas dotychczas zaniedbany. Zauważmy, że kiedy młotek zaczyna przemieszczać się w wodzie, to i woda musi wykonywać ruch, pewna porcja wody musi bowiem zająć wcześniejsze położenie młotka, a inna część wody musi ustąpić „robiąc miej-

sce” poruszającemu się młotkowi. Gdybyśmy podchodzili do naszego zagadnienia drgań od strony energetycznej obliczając energię kinetyczną i potencjalną całego układu – to musielibyśmy koniecznie uwzględnić energię kinetyczną ruchu wody. Energia potencjalna wody została już przez nas uwzględniona poprzez prawo Archimedesesa, co wyraziło się zastąpieniem  $g$  przez  $g \left( 1 - \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}} \right)$

w równaniu ruchu. Energię kinetyczną wody możemy uwzględnić przyjmując, że przy prędkości ciała  $v$ , porusza się nie tylko masa  $m$ , ale i pewna „efektywna” masa wody, która powinna być proporcjonalna do objętości zajmowanej przez młotek

$$E_k = \left[ m + \gamma m \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}} \right] \frac{v^2}{2} = m \left( 1 + \gamma \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}} \right) \frac{v^2}{2}.$$

Zatem obecność wody nie tylko zmniejsza siłę sprowadzając wahadło do położenia równowagi, co wyraża dodatkowy czynnik  $\left( 1 - \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}} \right)$  we wzorze (3), ale ponadto zwiększa bezwładność waha-

hadła. Korzystając ze znanej postaci wzoru na okres drgań oscylatora  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ , widzimy, że taki wzrost bezwładności powinien zmodyfikować wzór (3) do postaci

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l \left( 1 + \gamma \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}} \right)}{g \left( 1 - \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}} \right)}}.$$

Ponieważ nie dysponujemy żadnym prostym sposobem obliczenia  $\gamma$ , dochodzimy do przekonania, że metodą badań okresu wahań wahadła w wodzie nie można wyznaczyć gęstości materiału, z którego wahadło jest wykonane. Skoro już jednak wykonaliśmy pomiary, a wielkość  $\rho_{\text{Fe}}$  łatwo znaleźć w tablicach, to możemy posłużyć się tymi wynikami do obliczenia wartości  $\gamma$ , czyli masy wody „unoszonej” wraz z wahadłem. Posługując się danymi, które uzyskał doświadczalnie autor tej książeczki, otrzymuje się

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{1 - \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}}}{1 + \gamma \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}}},$$

czyli

$$\gamma = \frac{T'^2}{T^2} \left( \frac{\rho_{\text{Fe}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} - 1 \right) - \frac{\rho_{\text{Fe}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \left( \frac{27}{28} \right)^2 (7,8 - 1) - 7,8 \approx 0,8,$$

co zgadza się z naszą intuicją. Wartość  $\gamma = 1$  oznaczałaby, że masa wody „dołączona” do ruchu młotka równa się po prostu masie wody wypartej przez młotek. Obliczenia teoretyczne dla ciała o kształcie kuli dają wartość  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Warto dodać, że wartość  $\gamma$  zależy w sposób istotny od kształtu ciała i dla bryły tak nieregularnej – z matematycznego punktu widzenia - jak główka młotka, obliczeń dokonać można jedynie na komputerze, stosując cały złożony aparat matematyczny hydrodynamiki.