

XXI OLIMPIADA FIZYCZNA (1972/1973). Stopień wstępny, zad. doświadczalne – D

| | |
|------------------------|---|
| Źródło: | Komitet Główny Olimpiady Fizycznej; Andrzej Szymacha: Olimpiady fizyczne XXI i XXII. WSiP, Warszawa 1975. |
| Nazwa zadania: | Wyznaczanie częstości prądu w sieci elektrycznej. |
| Działy: | Elektryczność |
| Słowa kluczowe: | prawo Ohma, prąd elektryczny, zmienny, opór właściwy, częstość, SEM, siła elektromotoryczna, zawada, połączenie szeregowo, równoległe, kondensator, woltomierz, amperomierz |

Zadanie doświadczalne – D, zawody stopnia wstępnego, XXI OF

Mając do dyspozycji woltomierz i amperomierz dla prądu zmiennego, opory i kondensatory radiowe o znanych wartościach, baterię o znanej sile elektromotorycznej oraz transformator sieciowy dający znane napięcie nie przekraczające 30 V (ze względu na bezpieczeństwo), zaproponuj metodę wyznaczania częstości w sieci. Dobierz odpowiednie wartości oporów i pojemności i wykonaj możliwie jak najdokładniejszy pomiar tej częstości.

Rozwiązanie

Podstawą pomiaru częstości w tym zadaniu są związki między amplitudą siły elektromotorycznej przyłożonej do układu złożonego z kondensatorów i oporów omowych a amplitudą prądu zmiennego, który płynie przez układ. Wyprowadźmy te wzory dla dwóch typowych połączeń – równoległego równoległego (**A**) i szeregowego (**B**).

A. Oznaczmy ładunek na jednej z okładek kondensatora przez Q . Z definicji prądu jako ładunku przepływającego w jednostce czasu mamy

$$I_1 = \frac{dQ}{dt}. \quad (1)$$

Napięcie na kondensatorze równe jest oczywiście w każdej chwili wartości siły elektromotorycznej prądu zmiennego, którą przyjmijmy jako równą $E_0 \sin \omega t$. Daje to nam równanie

$$\frac{Q}{C} = E_0 \sin \omega t, \quad (2)$$

co po zróżniczkowaniu i skorzystaniu z równania (1) daje nam związek

$$\frac{I_1}{C} = E_0 \omega \cos \omega t. \quad (3)$$

Prąd I_2 obliczamy natychmiast z prawa Ohma

$$I_2 = \frac{E_0 \sin \omega t}{R}, \quad (4)$$

a prąd całkowity wyznaczamy ostatecznie jako sumę $I_1 + I_2$,

$$I = I_1 + I_2 = E_0 C \omega \cos \omega t. \quad (5)$$

Ze względu na przesunięcie w fazie o $\pi/2$ między prądem płynącym przez kondensator a prądem płynącym przez opór nie możemy dodać po prostu amplitud prądów I_1 i I_2 . Posłu-

gując się właściwościami funkcji trygonometrycznych możemy jednak otrzymany wzór na I przekształcić tak, by można z niego odczytać amplitudę natężenia prądu I . Definiujemy w tym celu pomocniczy kąt δ :

$$\cos \delta = \frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{\left(\frac{E_0}{R}\right)^2 + (E_0 C \omega)^2}}, \quad \sin \delta = \frac{E_0 C \omega}{\sqrt{\left(\frac{E_0}{R}\right)^2 + (E_0 C \omega)^2}}, \quad (6)$$

co pozwala przepisać równanie (5) w postaci

$$I = \sqrt{\left(\frac{E_0}{R}\right)^2 + (E_0 C \omega)^2} (\cos \omega t \sin \delta + \sin \omega t \cos \delta) = E_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2 \omega^2} \sin(\omega t + \delta). \quad (7)$$

Wypadkowy prąd ma amplitudę

$$I_0 = E_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2 \omega^2} \quad (8)$$

i wyprzedza w fazie siłę elektromotoryczną o kąt δ określony wzorami (6). Wielkość

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2 \omega^2}}, \quad (9)$$

grająca rolę analogiczną do zwykłego oporu w prawie Ohma dla prądu stałego, nosi nazwę zawady zastępczej dla rozpatrywanego przez nas układu.

Jak łatwo odczytać ze wzoru (9), zawada samego kondensatora wynosi

$$Z_c = \frac{1}{C \omega}. \quad (10)$$

Należy podkreślić, że zawadami rzeczywistymi (a więc określającymi jedynie amplitudy prądów zmiennych) nie zawsze można posługiwać się tak, jak zwykłymi oporami w przypadku prądów stałych. Na przykład w naszym problemie naiwne zastosowanie wzoru (10) i prawa składania oporów równoległych doprowadziłoby nas do wyniku

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + C \omega, \quad (11)$$

który jest na pewno fałszywy, skoro dowiedliśmy poprawności wzoru (9).

B. Po dość dokładnym rozpatrzeniu przypadku **A** możemy sobie teraz pozwolić na znacznie pobieżniejsze rozwiązanie drugiego obwodu.

Z prawa Kirchhoffa mamy

$$RI + \frac{Q}{C} = E_0 \sin \omega t. \quad (12)$$

Ponieważ nie wiemy z góry, jakie jest przesunięcie fazowe prądu I , piszemy ogólnie

$$I = I_0 \sin(\omega t + \delta), \quad (13)$$

gdzie I_0 i δ - do wyznaczenia.

Różniczkując wzór (12) mamy

$$I_0 R \omega \cos(\omega t + \delta) + \frac{I_0}{C} \sin(\omega t + \delta) = E_0 \omega \cos \omega t, \quad (14)$$

Definiujemy

$$\cos \delta' = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}}, \quad (15)$$

$$\sin \delta' = \frac{\frac{1}{C \omega}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}}, \quad (16)$$

co pozwala nam przepisać (14) w postaci

$$I_0 \omega \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} [\cos \delta' \cos(\omega t + \delta) + \sin \delta' \sin(\omega t + \delta)] = E_0 \omega \cos \omega t \quad (17)$$

lub jeszcze prościej

$$I_0 \cos[\omega t + \delta - \delta'] = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} \cos \omega t. \quad (18)$$

Równanie powyższe będzie spełnione, jeśli

$$\delta = \delta' \quad (19)$$

oraz

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}}. \quad (20)$$

Tak więc dla układu B

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}. \quad (21)$$

Jeżeli teraz przyjrzymy się wzorom (8) i (20) i uświadomimy sobie, że we wzorach tych z wyjątkiem ω wszystkie wielkości są bądź nam znane, bądź mogą być łatwo zmierzone za pomocą woltomierza i amperomierza, to powinno już być jasne, że można w ten sposób wyznaczyć wielkość ω . Źródło stałej siły elektromotorycznej służyć miało do ewentualnego sprawdzenia, czy upływność kondensatora, jakim dysponował uczeń, nie była na tyle duża, by trzeba ją było uwzględnić w obliczeniach jako dodatkowy opór połączony równolegle z właściwym kondensatorem.