

XX OLIMPIADA FIZYCZNA (1970/1971). Stopień II, zadanie teoretyczne – T1

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej,
Waldemar Gorzkowski:
Olimpiady Fizyczne XIX i XX, WSiP, 1974, str. 129 – 131;
Zbiór zadań z olimpiady fizycznej. WSiP, Warszawa 1987, zad. 6.1, str. 43, 151 – 152.

Nazwa zadania: Ruch kulki na równi bez poślizgu¹

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: tarcie statyczne, kinetyczne, potoczyste, poślizgowe, współczynnik, prędkość liniowa, kątowna, ruch postępowy, obrotowy, siła, moment siły, II zasada dynamiki Newtona, moment bezwładności, kulka, równia pochyła, toczenie, staczanie się

Zadanie teoretyczne – T1, zawody II stopnia, XX OF

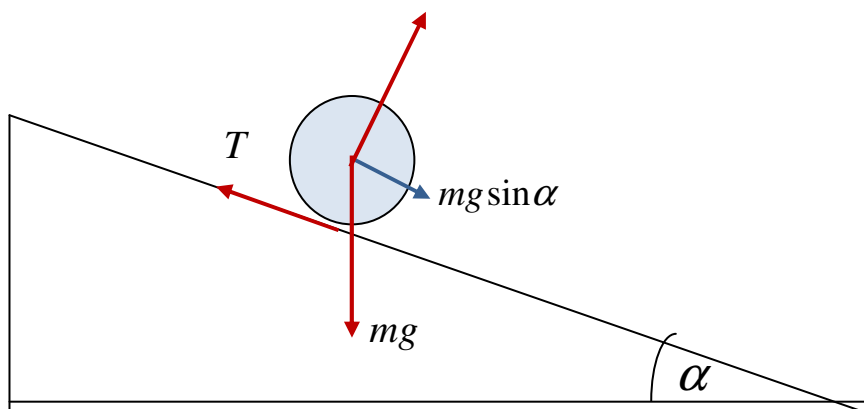
Jednorodna kulka stacza się po równi pochyłej o kącie nachylenia α . Współczynnik posuwistego tarcia statycznego kulki o równię wynosi f . Współczynnik tarcia potocznego równa się zero. Wyznacz przedział kątów α , dla których ruch kulki może odbywać się bez poślizgu.

Rozwiązanie

Stycznie do równi działają dwie siły: składowa siły ciężkości $mg \sin \alpha$ i siła tarcia T (rys. 1). Wypadkowa tych sił nadaje środkowi kulki przyspieszenie liniowe a . Mamy:

$$ma = mg \sin \alpha - T,$$

gdzie m oznacza masę kulki. Siła tarcia T jest przyłożona do kulki w punkcie, w którym kulka styka się z równią. Siła ta nadaje kulce przyspieszenie kątowne ε względem osi przechodzącej przez środek.



Rys. 1

¹ Porównaj zadania o podobnej tematyce z olimpiad: XXI OF; st. I – zad. T3: Prędkość kulki staczającej się z równi pochyłej; XXII OF, st. II – zad. D: Wyznaczanie współczynnika tarcia kulki stalowej o szkło; VI MOF, – zad. T1: Ruch walców staczających się z równi; XXIV OF, st. II – zad. D2 (dodatkowe): Wyznaczanie współczynnika tarcia posuwistego rurki o równię; XXVII OF, st. I – zad. T1: Ruch kulki na równi z uwzględnieniem tarcia potocznego i posuwistego; XXVII OF, st. III – zad. T2: Opis ruchu kulki z uwzględnieniem tarcia posuwistego i potocznego; XXX OF, st. I – zad. T4: Analiza ruchu z równi kulki z tarciem tocznym; XXXI OF; st. wstępny – zad. D1: Wyznaczanie współczynnika statycznego tarcia potocznego stali o szkło.

Mamy:

$$I \varepsilon = T r$$

gdzie r oznacza promień kulki, a I – jej moment bezwładności względem przechodzącej przez środek. Jak wiadomo $I = \frac{2}{5} m r^2$. Otrzymane dwa równania wyrażają drugie prawo Newtona dla ruchu postępowego i ruchu obrotowego. W równaniach tych występują trzy niewiadome a , ε i T . W przypadku, gdy kulka stacza się bez poślizgu, między a i ε zachodzi związek:

$$a = \varepsilon r.$$

W ruchu bez poślizgu w układzie związanym ze środkiem kuli w każdej chwili prędkość liniowa musi być taka sama, jak prędkość punktów „na obwodzie”. Oznacza to, że w ruchu bez poślizgu prędkość liniowa kulki v musi wiązać się z jej prędkością kątową ω wg wzoru

$$v = \omega r.$$

Obliczając pochodną obu stron po czasie otrzymujemy wyżej podany wzór wiążący a z ε .

Korzystając z pierwszych trzech równań obliczamy T . Po krótkich obliczeniach otrzymujemy:

$$T = \frac{m g \sin \alpha}{m r^2 / I + 1}.$$

Podstawiając wyrażenie na moment bezwładności kulki otrzymujemy ostateczne wyrażenie na siłę tarcia w ruchu kulki po równi bez poślizgu:

$$T = \frac{2}{7} m g \sin \alpha.$$

Siła ta nie może przekraczać maksymalnej siły tarcia $T_{\max} = f N$, gdzie N oznacza siłę nacisku na podłoże. W naszym wypadku:

$$N = m g \cos \alpha.$$

Zatem

$$\frac{2}{7} m g \sin \alpha = T \leq T_{\max} = f m g \cos \alpha.$$

Stąd

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{7}{2} f,$$

$$\alpha \leq \operatorname{arctg} \left(\frac{7}{2} f \right).$$

Widzimy więc, że ruch kulki bez poślizgu może odbywać się tylko dla takich kątów, których wartość nie przekracza $\operatorname{arctg}(7f/2)$.

Warto tu podkreślić, że do staczania się bez poślizgu konieczne jest występowanie siły tarcia – właśnie ta siła nadaje kulce przyspieszenie kątowe. Spotykamy czasem zwrot: ”kulka stacza się bez tarcia i bez poślizgu” jest oczywistym błędem, ponieważ jeżeli nie ma tarcia, to musi być poślizg, gdyż wtedy prędkość liniowa zmienia się, a kątowa pozostaje stała, a jeżeli nie ma poślizgu, to musi być tarcie nadający kulce odpowiednie przyspieszenie kątowe. Cechą charakterystyczną siły tarcia występującej podczas ruchu kulki bez poślizgu jest to, że siła ta nie wykonuje pracy, mimo że podczas ruchu przesuwają się jej punkty zaczepienia. Uzasadnienie tego pozostawimy Czytelnikowi.