XX OLIMPIADA FIZYCZNA (1970/1971). Stopień I, zadanie teoretyczne – T2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski: Olimpiady fizyczne XIX i XX. WSiP, Warszawa 1974.

Nazwa zadania: Analogia mechaniczno−elektryczna

Działy: Elektryczność, mechanika

Słowa kluczowe: Siła, natężenie prądu, okres drgań, opór, prawa Kirchhoffa, ładunek, siła elektromotoryczna, pojemność kondensatora, indukcja, indukcyjność, ogniwo, obwód elektryczny, cewka

Zadanie teoretyczne – T2, zawody I stopnia, XX OF.

Jeżeli siła jest funkcją położenia, to z matematycznego punktu widzenia II prawo dynamiki Newtona ustala związek między chwilową szybkością zmian szybkości zmian (drugą pochodną) położenia, czyli przyspieszeniem, a położeniem.

Jeżeli dla jakiegoś problemu mechanicznego znamy ten związek oraz wszystkie własności ruchu, to możemy te wiadomości wykorzystać do rozwiązania innego problemu, niekoniecznie z mechaniki.

Rozpatrzmy obwód złożony z kondensatora o pojemności C, zawierającego w chwili początkowej ładunek Q. Kondensator zwieramy cewką o współczynniku samoindukcji L. Chwilową wartość natężenia łatwo można powiązać z szybkością zmian ładunku Q na okładce kondensatora. Z kolei siła elektromotoryczna samoindukcji w prosty sposób wyraża się przez szybkość zmian natężenia prądu (czyli przez szybkość zmian Q). Jeżeli wyrazić napięcie na kondensatorze przez Q i skorzystać z odpowiedniego prawa Kirchhoffa dla obwodu, w którym nie ma oporów omowych, to otrzymamy związek między „przyspieszeniem” ładunku a samym ładunkiem. Korzystając teraz ze znanych wiadomości z mechaniki odpowiedz na następujące pytania:

a) według jakiego prawa natężenie prądu zależy od czasu?

b) ile wynosi okres drgań?

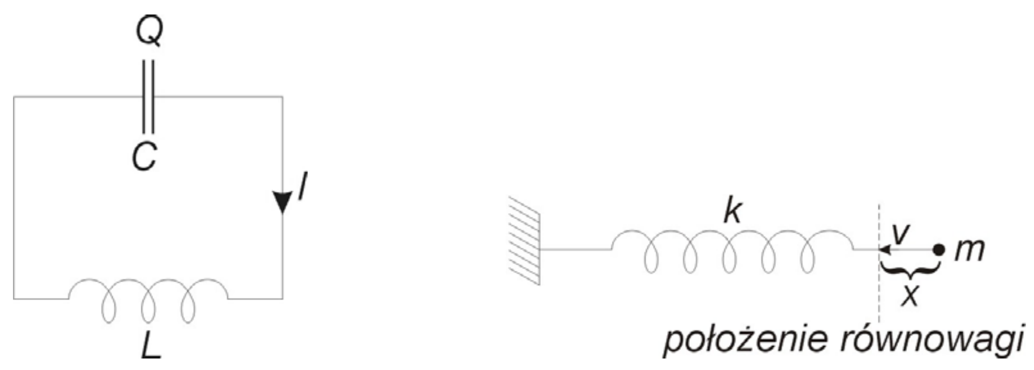
c) jaka jest maksymalna wartość natężenia prądu?

d) czy można ustalić analogię między oporem R (gdyby taki dodać do obwodu szeregowo z L) a pewną dodatkową siłą (jaką) w odpowiednim problemie mechanicznym?

e) czy można tą metodą rozwiązać problem zależności natężenia prądu od czasu w obwodzie złożonym z ogniwa o stałej sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ i znikomym oporze wewnętrznym, zwartego cewką o samoindukcji.

Rozwiązanie

Weźmy pod uwagę obwód elektryczny pokazany na rysunku 1a. Niech q oraz i oznaczają odpowiednio ładunek na kondensatorze i natężenie prądu w obwodzie w chwili $t = 0$, a Q i I – to samo w chwili t.



a) b)

Rys. 1

W układzie nie ma siły elektromotorycznej. Zatem zgodnie z II prawem Kirchhoffa suma spadków napięć na kondensatorze i cewce musi równać się zero:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}Q=0\,,$$

ale

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

zatem

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{C}Q\,. \qquad (1)$$

Otrzymana zależność jest równaniem różniczkowym, które przy danych L i C można rozwiązać i wyznaczyć funkcję $Q(t)$, czyli określić, jak ładunek na kondensatorze zmienia się w czasie.

Widzimy, że „przyspieszenie” ładunku, czyli jego druga pochodna, jest proporcjonalne do samego ładunku. Z podobną sytuacją zetknęliśmy się już w mechanice przy omawianiu ruchu harmonicznego. Podczas takiego ruchu druga pochodna wychylenia od położenia równowagi (a więc zwykle przyspieszenie) jest proporcjonalna do wychylenia. Na przykład dla ciężarka (rys. 1b) o masie m przymocowanego do unieruchomionej z jednego końca nieważkiej sprężyny o stałej sprężystości k, leżącej na poziomym gładkim stole, mamy

$$m\vec{\mathrm{a}}=-k\vec{\mathrm{x}}\,,$$

$\vec{\mathrm{a}}$ oznacza tu przyspieszenie ciężarka, a $\vec{\mathrm{x}}$ – jego wychylenie od położenia równowagi. We wzorze tym po prawej stronie mamy znak -. Oznacza on, że przyspieszenia $\vec{\mathrm{a}}$ i wychylenie $\vec{\mathrm{x}}$ są zwrócone w przeciwne strony. Uwzględniając, że $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (v – prędkość ciężarka) i że $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, możemy napisać

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx\,. \qquad (2)$$

Zależność ta jest równaniem różniczkowym, z którym przy danych m i k można wyznaczyć funkcję $x(t)$, czyli zależność wychylenia od czasu.

Równania (1) i (2) – jeżeli nie brać pod uwagę inny nazw poszczególnych parametrów – są takie same. Jeżeli więc weźmiemy rozwiązanie jednego z nich i zamienimy oznaczenia na takie, jakie występują w drugim, to otrzymamy rozwiązanie drugiego z tych równań. Oczywiście musi tak być, gdyż proces rozwiązywania równania nie zależy od tego, jakimi literkami oznaczone są różne parametry. Ustalmy teraz odpowiedniość między wielkościami wchodzącymi do rozpatrywanych równań. Jak widać, masie m możemy przyporządkować współczynniki samoindukcji L, stałej sprężystości k – odwrotność $1/C$, a wychyleniu x – ładunek Q.

Pójdźmy jeszcze dalej i zobaczmy, jakie są odpowiedniki innych wielkości mechanicznych, nie występujące bezpośrednio w równaniu (2).

Prędkość określamy jako pochodną wychylenia:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

W układzie elektrycznym x przechodzi w Q, a t nie zmienia się. Zatem

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I.$$

Widzimy, że elektrycznym odpowiednikiem prędkości jest natężenie prądu I.

Energia kinetyczna ciężarka równa jest

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2.$$

Korzystając z tego, że mamy $m \to L$ i $v \to I$ możemy napisać

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \longrightarrow \frac{1}{2} L I^2 = E_L.$$

Jak widać, energii kinetycznej ciężarka odpowiada energia zgromadzona przez cewkę, przez którą płynie prąd.

Dla energii potencjalnej napiętej sprężyny

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

mamy podobnie

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = E_C$$

Zatem energii potencjalnej odpowiada energia kondensatora, na którym zgromadzono ładunek

Analogii takich można by wypisać znacznie więcej. Na razie jednak wystarczy nam to, co wyżej przytoczyliśmy.

Zajmijmy się teraz równaniem (2). Powiedzieliśmy, że jest to równanie różniczkowe. W szkole nie rozwiązujecie takich równań, jednak rozwiązanie akurat tego równania różniczkowego łatwo wypisać, gdyż zależność $x(t)$ w ruchu harmonicznym, tj. zależność wychylenia ciężarka od czasu jest znana. Wiadomo przecież, że wychylenie ciężarka zmienia się jak funkcja sinus:

$$x(t) = x_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right).$$

We wzorze tym x_0 oznacza największą wartość wychylenia, czyli amplitudę. T – okres ruchu, a φ_0 – fazę początkową, czyli wartość argumentu funkcji sinus w chwili $t = 0$. (Oczywiście φ_0 zależy, od którego momentu zaczynamy liczyć czas.) Zazwyczaj aby uniknąć postaci ułamkowej $\frac{2\pi}{T}$ wprowadza się wielkość ω równą $\frac{2\pi}{T}$. Możemy więc napisać

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{3}$$

W rozwiązaniu zadania o windzie z zawodów drugiego stopnia poprzedniej Olimpiady Fizycznej udowodniliśmy, że dla ciężarka drgającego na sprężynie mamy:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

i

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Jak zmienia się prędkość ciężarka? Skorzystajmy z określenia prędkości:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Biorąc za x nasze wyrażenie na $x(t)$ otrzymujemy:

$$v(t) = x_0\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Prędkość ma największą wartość bezwzględną $v_{\max}$ wtedy, gdy cosinus równa się ±1. (zauważmy, że wtedy $x = 0$.)
Mamy więc

$$v_{\max} = x_0\omega.$$

Skorzystajmy teraz z ustalonej poprzednio odpowiedniości i zobaczmy, w co przejdą nasze wyrażenia po przejściu od układu mechanicznego (rys. 1a), czyli po zastąpieniu wielkości mechanicznych odpowiednimi wielkościami elektrycznymi.

Łatwo zauważyć, że Q – analogicznie jak x – musi zmieniać się sinusoidalnie według wzoru

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T}$. $|Q_0|$ oznacza oczywiście największą wartość ładunku na kondensatorze. Jakie są teraz ω i T? Ponieważ $m \to L$, a $k \to \frac{1}{C}$, więc:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \to \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \to 2\pi\sqrt{LC}.$$

Natężenie prądu możemy wyznaczyć dwoma sposobami. Możemy obliczyć pochodną $Q(t)$ po czasie lub skorzystać z zależności v od t dla układu mechanicznego i zastąpić w niej wielkości mechaniczne ich odpowiednikami elektrycznymi. Oczywiście w obu wypadkach otrzymujemy to samo, a mianowicie:

$$I(t) = Q_0 \omega \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right),$$

gdzie

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,.$$

Największa wartość natężenia prądu w obwodzie wynosi więc

$$I_{\max} = |Q_0|\omega = |Q_0|\frac{1}{\sqrt{LC}}\,.$$

Jak widzimy, w obwodzie występują drgania sinusoidalne, przy czym fazy drgań Q oraz I są przesunięte względem siebie o $\pi/2$, co oznacza, że gdy $Q = 0$, to I ma wartość maksymalną i odwrotnie.

Parę słów należy poświęcić wielkościom Q_0 i φ_0 występującym we wzorze na $Q(t)$. Ławo stwierdzić, że niezależnie od tego, jakie są wartości tych parametrów, jeżeli $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, to $Q(t)$ spełnia równanie (1). Tak więc, w zasadzie $Q(t)$ nie jest jedną funkcją, lecz całym zespołem funkcji, z których każda opowiada jakimś konkretnym wartościom Q_0 i φ_0. Wszystkie te funkcje są rozwiązaniami równania (1). Na pierwszy rzut oka wydaje się, że coś tu nie jest w porządku. Przecież, jeżeli mamy jakiś konkretny układ, to należałoby sądzić, że istnieje tylko jedna funkcja $Q(t)$ opisująca zależność ładunku Q od czasu. Otóż nie jest to prawdą. W danym układzie mogą zachodzić różne drgania różniące się np. amplitudą zmian ładunku. Jasne jest, że dwa drgania o różnej amplitudzie nie mogą odpowiadać takiej samej zależności $Q(t)$. Aby wyznaczyć konkretną funkcję $Q(t)$, czyli aby określić wartość Q_0 i φ_0 dla danego układu, musimy o tym układzie wiedzieć nieco więcej niż tylko to, jak poszczególne elementy są ze sobą połączone. W naszym wypadku oprócz samego schematu układu do wyznaczenia Q_0 i φ_0 musimy znać np. wielkość ładunku na kondensatorze oraz natężenie prądu w obwodzie w chwili $t = 0$. Są to tzw. wartości początkowe. Znajomość warunków początkowych pozwala z całej rodziny funkcji $Q(t)$ wybrać tę konkretną funkcję, która odpowiada naszemu przypadkowi.

Układ opisany w tekście zadania charakteryzuje się następującymi warunkami początkowymi:

$$Q(0) = q$$

$$I(0) = 0$$

Druga równość oznacza, że w chwili przyłączenia cewki do kondensatora ($t = 0$), natężenie prądu równa się zeru. Mamy więc

$$Q_0 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} 0 + \varphi_0\right) = q\,,$$

$$Q_0 \frac{1}{LC} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} 0 + \varphi_0\right) = 0\,.$$

Z równań tych możemy wyznaczyć Q_0 i φ_0. Po krótkich obliczeniach otrzymujemy:

$$Q_0 = q \quad \text{i} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Zatem w rozpatrywanym przez nas układzie przy warunkach początkowych takich, jak w tekście zadania, Q i I zmieniają się według wzorów

$$Q(t) = q\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$I(t) = q\frac{1}{\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{\pi}{2}\right),$$

czyli

$$Q(t) = q\cos\frac{t}{\sqrt{LC}},$$

$$I(t) = -\frac{q}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

Największymi wartościami bezwzględnymi Q oraz I są odpowiednio $|q|$ oraz $|q|/\sqrt{LC}$. Okres zmian Q oraz I wynosi $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

W ten sposób otrzymaliśmy odpowiedź na pierwsze trzy pytania.

Aby znaleźć odpowiedź na pytanie d, rozpatrzmy obwód z rysunku 2. Na podstawie II prawa Kirchhoffa suma spadków napięć na poszczególnych elementach obwodu musi równać się zeru, gdyż obwód nie zawiera żadnej siły elektromotorycznej. Zatem

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} + RI = 0,$$

czyli

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{C}Q - R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Mechanicznym odpowiednikiem tej zależności jest:

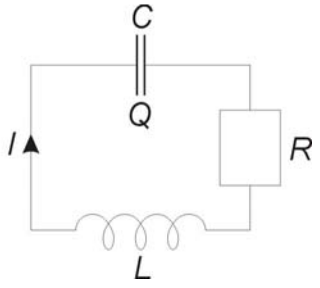
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{v},$$

czyli

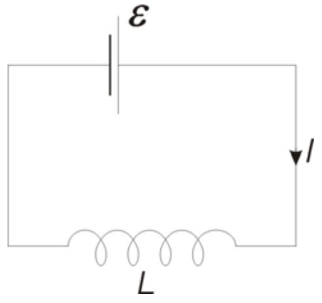
$$ma = -kx - \gamma v.$$

Widzimy, że spadek napięcia na oporze R tj. $R\left(R\frac{dQ}{dt}\right)$ odpowiada sile hamującej (tłumiącej) ruch, proporcjonalnej do prędkości (γv).

Został nam jeszcze jeden punkt do rozwiązania. Chcemy znaleźć zależność natężenia prądu od czasu w obwodzie złożonym z ogniwa o stałej sile elektromotorycznej i zerowym oporze wewnętrznym oraz cewki o samoindukcji L. Obwód taki jest pokazany na rysunku 3.



Rys. 2



Rys. 3

Z II prawa Kirchhoffa dla tego obwodu mamy:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\mathcal{E},$$

co oznacza, że spadek napięcia na cewce musi równać się sile elektromotorycznej. Równanie to można napisać w postaci:

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}=\mathcal{E}. \tag{4}$$

Mechanicznym odpowiednikiem lewej strony tego równania jest

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

czyli

$$ma.$$

Z mechaniki wiemy, że ma równa się sile F działającej na punkt masie m, nadającej mu przyspieszenie a. Zatem mechanicznym odpowiednikiem stałej siły elektromotorycznej jest siła F. Odpowiednikiem równania (4) jest więc równanie

$$ma=F\ (=\mathrm{const}).$$

Równanie to opisuje ruch punktu materialnego o masie m pod działaniem stałej siły F. Punkt ten porusza się ruchem jednostajnie przyśpieszonym z przyśpieszeniem $a=\frac{F}{m}$. Jak wiemy, prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym zależy od czasu według wzoru:

$$v(t)=v_0+at=v_0+\frac{F}{m}t.$$

Wróćmy teraz do wielkości elektrycznych. Korzystając z odpowiedniości

$$v\to I,$$

$$F\to\mathcal{E},$$

$$m\to L,$$

otrzymujemy:

$$I(t)=I_0+\frac{\mathcal{E}}{L}t.$$

W ten sposób otrzymaliśmy odpowiedź na ostatnie pytanie. Widzimy, że natężenie prądu zmienia się jednostajnie wraz z czasem. I_0 oznacza natężenie prądu w obwodzie w chwili $t=0$.

Przy okazji warto wspomnieć jeszcze o zachowaniu energii. Układ z rysunku 1b jest układem izolowanym. W układzie takim energia całkowita, równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej, musi być cały czas stała:

$$\frac{1}{2}m^2v+\frac{1}{2}kx^2=\mathrm{const}.$$

Dla układu elektrycznego z rys. 1a oznacza to, że wielkość

$$\frac{1}{2}LI^2 + \frac{Q^2}{2C}$$

również musi być stała. Fakt ten wykorzystamy w zadaniu o neonówce z zawodów trzeciego stopnia tej Olimpiady.

Równanie (1) możemy obustronnie pomnożyć przez dowolną stałą, co więcej stałą tę możemy włączyć pod znak drugiej pochodnej, gdyż jak wiadomo $\beta\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \beta f(x)}{\mathrm{d}x^2}$. Tak więc równanie to możemy napisać w bardzo wielu różnych postaciach, np. tak:

$$C\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{L}Q,$$

$$C\frac{\mathrm{d}^2 (CQ)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{L}(CQ),$$

$$\sqrt{L}\frac{\mathrm{d}^2 (LQ)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{C\sqrt{L}}(\sqrt{L}Q),$$

a ogólnie

$$\alpha L\frac{\mathrm{d}^2 (\beta Q)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\alpha}{C}(\beta Q),$$

gdzie α i β są dowolnymi stałymi różnymi od zera.

Korzystając z pierwszego z podanych tu przykładów oraz równania (2) moglibyśmy tu ustalić „inną” analogię elektryczno-mechaniczną:

$$m \leftrightarrow C,$$

$$x \leftrightarrow Q,$$

$$k \leftrightarrow \frac{1}{L}.$$

Analogię tę można by rozwinąć dalej i wyznaczyć odpowiednik innych wielkości, które nie występują bezpośrednio w naszych równaniach. Oczywiście wnioski fizyczne, które otrzymalibyśmy stosując powyższą analogię, były by takie same jak poprzednio, co Czytelnik może sam sprawdzić. Z tego względu słowo „inną” wzięliśmy w cudzysłów.

Jasne jest, że „różnych” analogii między naszymi układami można ustalić nieskończenie wiele, gdyż stałe α i β mogą być zupełnie dowolne. Jednakże wszystkie te analogie prowadzą do identycznych wniosków fizycznych. Można to dość prosto udowodnić, ale nie będziemy tego robili, aby zbytnio nie odbiegać od tematu.

Warto jeszcze wspomnieć, że niektóre z analogii, a w szczególności analogia, którą omawialiśmy na początku, mają tę własność, że odpowiednikami energii potencjalnej i kinetycznej są energia naładowanego kondensatora i energia cewki z prądem, a nie wielkości do nich proporcjonalne, jak w pozostałych analogiach. Fakt ten upraszcza wiele rozważań w przypadkach, gdy energia elektryczna zamienia się na mechaniczną lub odwrotnie. Między innymi z tego względu przy omawianiu analogii mechaniczno-elektrycznych w podręcznikach zwykle wymienia się tylko tę, którą omawialiśmy na początku, otrzymaną przez porównanie współczynników w nieprzekształconych równaniach wynikających wprost z praw fizycznych.

Zadanie powyższe jest ilustracją bardzo prostej i oczywistej zasady, którą chyba zbyt rzadko sobie uświadamiamy, chociaż często się nią posługujemy. Zasada ta mówi, że:

takie same równania mają takie same rozwiązania niezależnie od tego, jaki sens fizyczny mają poszczególne wielkości w nich występujące.

Zasada ta jest bardzo ważna i upraszcza wiele badań. Między innymi dzięki tej zasadzie można modelować różnego rodzaju procesy mechaniczne i inne w maszynach analogowych lub innych podobnych urządzeniach. Modelowanie takie pozwala określić zachowanie się jakiegoś urządzenia bez potrzeby jego budowania. Wystarczy działanie tego przyrządu zmodelować za pomocą odpowiednich obwodów elektrycznych. W ten sposób często można stwierdzić, czy dane urządzenie w ogóle warto budować. Ważność wspomnianej zasady polega nie tylko na tego rodzaju praktycznych zastosowaniach. Ma ona głęboki sens fizyczny, gdyż wyraża jedność różnych zjawisk fizycznych.