XX OLIMPIADA FIZYCZNA (1970/1971). Stopień I, zadanie teoretyczne – T1

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski: Olimpiady fizyczne XIX i XX. WSiP, Warszawa 1974.

Nazwa zadania: Odległość pręta od ściany po zsunięciu się z niego punktu materialnego.

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: Pręt, ruch jednostajny, przyspieszenie, kątowe, ziemskie, energia, zasada zachowania, siła, dośrodkowa, reakcja, moment siły, bezwładności.

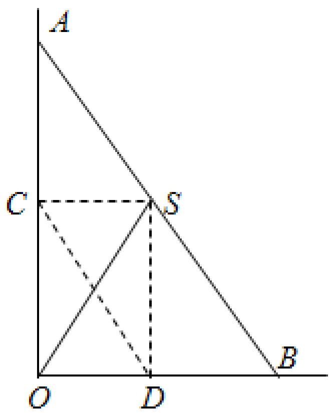
Zadanie teoretyczne - T1, zawody I stopnia, XX OF.

W środku cienkiego, nieważkiego pręta o długości 20 cm zamocowano punkt materialny. Pręt postawiono pionowo przy gładkiej ścianie. Dolny koniec pręta może ślizgać się bez tarcia po podłożu. Pręt znajduje się oczywiście w położeniu równowagi chwiejnej i po niewielkim zakłóceniu zaczyna obsuwać się, pozostając przez cały czas w jednej płaszczyźnie. Po osiągnięciu podłoża środek pręta natychmiast przykleja się do niego i pozostaje nieruchomy. Wyznacz ostateczną odległość środka pręta od ściany.

Rozwiązanie

Przede wszystkim zauważmy, że gdyby końce pręta cały czas poruszały się po torach wzajemnie prostopadłych, to jego środek poruszałby się po okręgu o promieniu równym połowie długości pręta (r = 10 cm) i o środku leżącym w miejscu, gdzie pionowa ściana styka się z poziomym podłożem. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że tor środka pręta powinien być jakąś krzywą wklęsłą, tzn. zwróconą swą wypukłością ku dołowi, jednak jest to tylko złudzenie. Środek pręta musi poruszać się po łuku zwróconym swą wypukłością ku górze.

Udowodnimy to. Weźmy pod uwagę pręt AB oparty o ścianę i podłogę tak, jak na rys. 1.

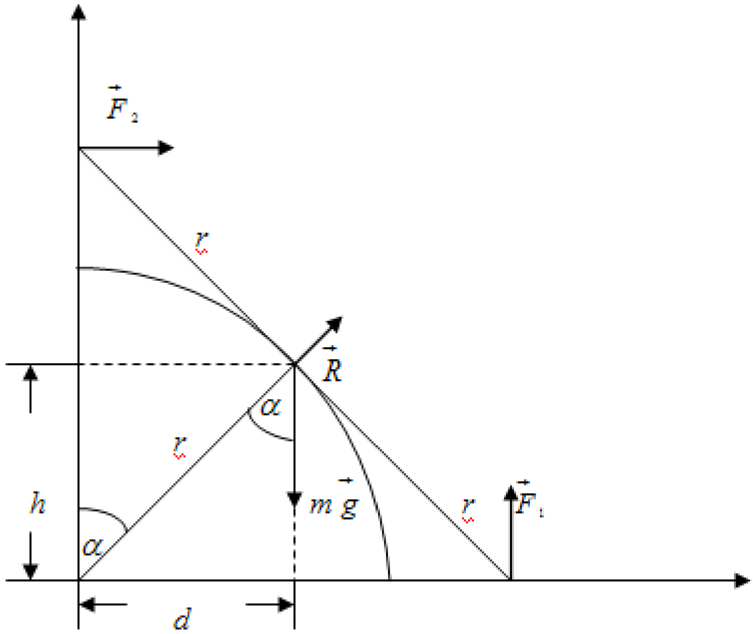


Rys. 1

Niech S oznacza środek pręta. Poprowadźmy prostopadłe z punktu S w kierunku ściany (SC) oraz podłogi (SD). Czworokąt $OCSD$ jest prostokątem, zatem jego przekątne są równe: CD = OS. Trójkąty ACS i OAB są podobne, gdyż odpowiednie boki mają równoległe. Wynika stąd, że punkt C dzieli odcinek OA na połowy. W podobny sposób dowodzimy, że punkt D leży na środku odcinka OB. Trójkąty OCD i OAB są podobne, gdyż jeden kąt mają wspólny, a odpowiednie boki przyległe do tego kąta są proporcjonalne.

Zatem $\frac{CD}{AB} = \frac{OC}{OA}$. Ponieważ jednak $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$, więc $CD = {}^1/_2\ AB$, ale jak stwierdziliśmy, poprzednio $CD = OS$, wobec czego $OS = {}^1/_2\ AB$. W ten sposób udowodniliśmy, że jeżeli pręt dotyka końcami ściany i podłoża, to odległość jego środka od punktu O stale równa się połowie długości pręta. Innymi słowy środek pręta, dopóki nie oderwie się od ściany, porusza się po okręgu o środku w punkcie O.

Na rysunku 2 pokazano pręt oraz działające nań siły. $\vec{F}_1$ oznacza siłę reakcji podłoża działającą na pręt, a $\vec{F}_2$ - siłę reakcji ściany działającą na pręt. Siła $\vec{R}$ jest wypadkową sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Pozostałe oznaczenia nie wymagają wyjaśnień.



Rys. 2

Ponieważ pręt jest nieważki, jego moment bezwładności względem środka jest równy zeru. Wynika stąd, że całkowity moment sił względem środka pręta musi równać się zeru. W przeciwnym bowiem wypadku pręt musiałby poruszać się z nieskończenie dużym przyspieszeniem kątowym względem punktu S. Ze względu na to, że obrotowi pręta ślizgającego się końcami po podłodze i ścianie towarzyszy przesunięcie jego środka wzdłuż łuku, nieskończone przyspieszenie kątowe pręta musiałoby spowodować nieskończone przyspieszenie liniowe punktu materialnego w środku pręta, a jest to niemożliwe, gdyż punkt ten ma pewną masę. Zatem

$$F_1 r \sin\alpha = F_2 r \sin\alpha,$$

stąd

$$\frac{F_2}{F_1} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Oznacza to, że wypadkowa $\vec{R}$ sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ jest skierowana wzdłuż promienia koła. Ze względu na to, że ściana i podłoga odpychają pręt, siła $\vec{R}$ musi być zawsze skierowana na zewnątrz okręgu. Rozpatrzmy teraz ruch punktu po kole i znajdźmy takie położenie, przy którym $\vec{R}$

staje się zerem, Gdyby ruch środka pręta cały czas odbywał się po okręgu, to po minięciu tego położenia $\vec{R}$ musiałoby zmienić zwrot, a to przeczyłoby założeniu, że ściana i podłoże mogą pręt odpychać, ale nie mogą go przyciągać. Punkt, dla którego $R = 0$ jest punktem, od którego ruch środka pręta będzie ruchem swobodnym – końce pręta przestaną naciskać na ściany
i podłoże i siły reakcji znikną. Z zasady zachowania energii mamy:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr(1 - \cos\alpha),$$

gdzie v oznacza prędkość środka pręta. Stąd

$$\frac{mv^2}{r} = 2mg(1 - \cos\alpha).$$

Siłą dośrodkową w ruchu środka pręta po kole jest suma wektorowa składowej $m\vec{g}$ wzdłuż promienia i siły reakcji $\vec{R}$:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\alpha - R.$$

Zatem

$$2mg(1 - \cos\alpha) = mg\cos\alpha - R.$$

Dla $R = 0$ mamy:

$$2mg(1 - \cos\alpha) = mg\cos\alpha.$$

Stąd

$$\cos\alpha = \frac{2}{3},$$

czyli

$$h = \frac{2}{3}r.$$

Tak więc, pręt oderwie się od ściany na wysokości $h = \frac{2}{3}r$. Dalszy ruch środka pręta odbywa się tak, jak podczas rzutu ukośnego w dół. W chwili, gdy środek pręta „odrywa” się od okręgu, jego prędkość wynosi:

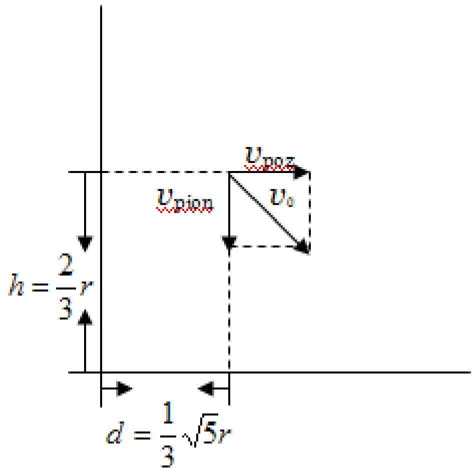
$$v_0 = \sqrt{2gr(1 - \cos\alpha)} = \sqrt{\frac{2}{3}gr}.$$

Prędkość ta jest styczna do okręgu. Jej składowe: pozioma i pionowa,
równają się odpowiednio:

$$v_{\text{poz}} = \sqrt{\frac{2}{3}gr}\cos\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gr},$$

$$v_{\text{pion}} = \sqrt{\frac{2}{3}gr}\sin\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{5}\sqrt{\frac{2}{3}gr}.$$

Odległość d w chwili oderwania się końca pręta od ściany wynosi $r\sin\alpha$, czyli $\frac{1}{3}\sqrt{5}r$. Sytuację w chwili, gdy, R = 0, tj. w chwili, gdy środek pręta zaczyna poruszać się tak, jak przy rzucie ukośnym w dół, ilustruje rysunek 3.



Rys. 3

Przez D oznaczmy szukaną odległość środka pręta w chwili padania na podłogę, a przez t czas trwania ruchu środka pręta od chwili, gdy R staje się równe zeru, Mamy:

$$h = v_{\text{pion}} t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{(w pionie ruch jednostajnie przyspieszony),}$$

$$D = d + v_{\text{poz}} t \qquad \text{(w poziomie jednostajny).}$$

Podstawiając do tych wzorów znalezione poprzednio wyrażenia na h, d, v_{poz} i v_{pion} otrzymujemy układ dwóch równań na D i t, zawierający parametry r i g. Z układu tego możemy wyznaczyć D i t. Pozostawiamy to Czytelnikowi do samodzielnego wykonania.

Oczywiście układ nasz ma dwa rozwiązania. Dla jednego z nich $D < d$. Rozwiązanie to odrzucamy, gdyż z warunków zadania wynika, że środek pręta nie może przybliżać się do ściany, a wiemy, że na odległość d na pewno od ściany się odsunie. Pozostaje drugie rozwiązanie, dla którego $D < d$. Jest nim

$$D = \frac{4\sqrt{23} + 5\sqrt{5}}{27} r \approx 12{,}5 \text{ cm.}$$

Ciekawe, że wartość D nie zależy od wielkości przyspieszenia ziemskiego g.
(Od g zależy czas t.) Tak więc środek pręta w chwili upadku na podłoże będzie oddalony od ściany o około 12,5 cm.