I OLIMPIADA FIZYCZNA (1951/1952). Etap III, zadanie teoretyczne – T3.

Źródło: Olimpiady Fizyczne, I- IV PZWS, Warszawa 1956

Autor: Stefan Czarnecki

Nazwa zadania: Wirujący pręt stalowy

Działy: Mechanika

Słowa kluczowe: Siła odśrodkowa, rozszerzalność temperaturowa, siły rozrywającej podzielmy pręt, energii kinetycznych ruchu obrotowego i postępowego,

Zadanie teoretyczne – T3, zawody IIII stopnia, I OF.

Jednorodny pręt stalowy o długości $2a$ = 1 m wiruje dokoła osi pionowej przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do jego długości. Wiedząc, że stal ulega zerwaniu przy naprężeniu ω = 1,95 ·,10^{10} dyn/cm^2 znając jej gęstość δ = 7,8 g/cm^3 , wyznaczyć liczbę n obrotów na sekundę, przy której pręt ulegnie zerwaniu. Na jakie części rozerwanie się pręt i jaki ich dalszy ruch?

R o z w i ą z a n i e

Część teoretyczna

Siła odśrodkowa działa wzdłuż pręta na każdy element jego masy. Wszystkie siły działające na elementy jednego ramienia współdziałają ze sobą, a ich wypadkowa osiąga największą wartość przy osi obrotu pręta. To samo dotyczy sił o zwrocie przeciwnym działających na elementy drugiego ramienia. Stąd wniosek, iż pręt ulegnie zerwaniu wzdłuż przekroju poprzecznego przechodzącego przez oś obrotu.

Dla wyznaczenia wielkości siły rozrywającej podzielmy pręt na małe, jednakowe elementy za pomocą przekrojów płaszczyznami prostopadłymi do jego długości. Niechaj masa jednego elementu wynosi Δm i niechaj będzie on odległy od osi obrotu o r. Siła odśrodkowa działająca na ten element wyraża się, jak wiemy:

$$\Delta F_0 = \frac{\Delta m v^2}{r},$$

lub

$$\Delta F_0 = \Delta m\, \omega^2 r\ ,$$

ponieważ jednak

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi n\,,$$

więc możemy napisać

$$\Delta F_0 = \Delta m\, 4\pi^2 n^2 r\,.$$

Należy teraz znaleźć wartość wypadkowej sił działających na wszystkie elementy jednego ramienia. Ponieważ siła $\Delta\, F_0$ jest wprost proporcjonalna do *r*, więc wszystkie siły $\Delta\, F_0$ można zastąpić ich wartością średnią:

$$\Delta\, m\, 4\, \pi^2\, n^2 \cdot \frac{a}{2},$$

gdyż r zmienia się od 0 do a. Suma tych sił średnich wynosi oczywiście:

$$F_0 = m\, 4\, \pi^2\, n^2 \cdot \frac{a}{2} = 2\pi^2\, m\, a\, n^2, \qquad (1)$$

gdzie *m* oznacza masę połowy pręta. Widać z tego, że zjawisko zachodzi tak, jak gdyby masa każdego ramienia była skoncentrowana w jego środku (środek masy).

Masę *m* możemy obliczyć znając pole przekroju pręta *S*, długość ramienia i gęstość stali δ:

$$m = S\, a\delta\, .$$

Podstawiając *m* do (1) mamy:

$$F = 2\, \pi^2 \cdot a^2 n^2 \delta\, S\, , \qquad (2)$$

Naprężenie w osiowym przekroju pręta wynosi:

$$\frac{F}{S} = 2\, \pi^2 a^2 n^2 \delta\, ,$$

a zerwanie nastąpi, gdy

$$\frac{F}{S} = \omega\, .$$

Pręt ulegnie więc zerwaniu, gdy częstość obrotów *n* osiągnie wartość:

$$n = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{\omega}{2\, \delta}}\, , \qquad (3)$$

czyli, gdy

$$n = \frac{1}{\pi \cdot 50\,\mathrm{cm}} \sqrt{\frac{1{,}95 \cdot 10^{10}\ \mathrm{dyn}}{2 \cdot 7{,}8\ \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}} \cong 225\ \mathrm{s}^{-1}\, .$$

Po rozerwaniu środki obu połówek pręta poruszać się będą po stycznych do koła, będącego poprzednio ich torem. Prędkość tego ruchu postępowego wyniesie

$$v = \omega \frac{a}{2} = 2\,\pi\, n \frac{a}{2} = an\,\pi =$$

$$= 50\ \mathrm{cm} \cdot 225\ \mathrm{sek}^{-1} \cdot 3{,}14 = 35325\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sek}} =$$

$$= 353{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sek}}.$$

Niezależnie od ruchu postępowego każda z oderwanych części będzie wykonywała ruch obrotowy dokoła swego środka masy w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny, w której obracał się pręt przed zerwaniem. Prędkości kątowe obu połówek pręta są równe prędkości kątowej pręta przed zerwaniem. Dzieje się tak dlatego, że stosunek prędkości liniowych punktów skrajnych do odległości od osi obrotu dla obu części i całego pręta jest jednakowy. Można by się o tym przekonać korzystając z prawa zachowania energii. Energia kinetyczna ruchu obrotowego całego wirującego pręta przed zerwaniem musi być równa sumie energii kinetycznych ruchu obrotowego i postępowego obu połówek po rozerwaniu.

Jeśli zjawisko odbywa się w polu grawitacyjnym ziemskim, to wówczas środki mas obu połówek pręta, oprócz ruchu postępowego w kierunku stycznej, spadają pionowo z przyśpieszeniem *g*. Tory ich środków mas będą oczywiście parabolami.

Dwóch spomiędzy zawodników dla znalezienia wartości wypadkowej siły odśrodkowej działającej na jedno ramię pręta posłużyło się matematyką wyższą.

„... Weźmy pod uwagę element pręta długości *dr* (rys. 1) – odległy od osi obrotu o *r*. Masa tego elementu wynosi $dm = \delta\ S\ dr$. Siła odśrodkowa działająca nań jest więc:

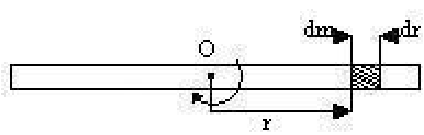
$$dF = \omega^2 r\ dm\,,$$

czyli

$$dF = \omega^2\ \delta\ Sr'\ dr\,.$$

Odległość *r* zmienia się od 0 do a, zatem wypadkowa sił wszystkich elementów będzie

$$F = \omega^2\ \delta\ S \int_0^a r\ dr = \omega^2\ \delta\ S \frac{r^2}{2} \int_0^a = \omega^2\ \delta\ S \frac{a^2}{2} = 2\,\pi\, n^2\ \delta\ S\ a^2 \text{...”}$$



Rys. 1

W zadaniu tym wielu uczestników popełniło ten sam błąd biorąc siłę rozrywającą dwukrotnie za dużą. Dodawali bowiem do siebie wypadkowe sił odśrodkowych obu połówek pręta i dopiero tę sumę traktowali jako siłę rozrywającą. Wystarczy jednak zauważyć, że gdyby nie było jednej połówki pręta, to i tak w myśl III zasady Newtona zjawiłaby się tej samej wielkości i również przeciwnie skierowana siła reakcji osi. Gdy są obie połowy pręta, wtedy siła odśrodkowa jednej z nich równoważy siłę odśrodkową drugiej przejmując „czynność” osi.

Średnia ocena za to zadanie wyniosła 3 punkty. Rozwiązań z oceną co najmniej 5 punktów było 18 , co stanowi 37 %.