I OLIMPIADA FIZYCZNA (1951/52). Etap I, zadanie teoretyczne T2

Źródło: Olimpiady Fizyczne I – IV. PZWS, Warszawa 1956

Autor: Stefan Czarnecki

Nazwa zadania: Sprawdzenie przez zastosowanie praw Kirchhoffa układu oporów w sieci o zadanym z góry oporze wewnętrznym

Działy: Prąd elektryczny

Słowa kluczowe: Opór całkowity, opór zastępczy, natężenie prądu, gałąź, dopuszczalne obciążenie układu

Zadanie teoretyczne – T2, zawody I stopnia, I OF

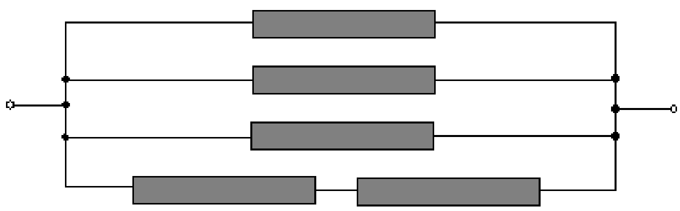
Mamy 5 oporników siedmioomowych, których nie wolno obciążać prądem o natężeniu większym niż 1 amper. Jak należy połączyć je ze sobą, aby otrzymać układy o oporze całkowitym: 2 omy, 3, 4, 5, 6 i 7 omów. Jakie maksymalne obciążenia są dopuszczalne dla poszczególnych układów?

W każdym przypadku należy włączyć wszystkie 5 oporów do obwodu.

Rozwiązanie

Zadanie polega na odgadnięciu i sprawdzeniu przez stosowanie praw Kirchhoffa układu oporów w sieci o zadanym z góry oporze wewnętrznym.

A. Opór całkowity 2 Ω (rys. 1). Układ składa się z czterech gałęzi równoległych; trzy z nich stanowią pojedyncze opory, czwarta składa się z dwóch oporów połączonych w szereg. Opór czwartej gałęzi wynosi więc 14 Ω. Opór zastępczy *R* układu znajdujemy stosując znany wzór na równoległe łączenie oporów:



Rys. 1

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+...+\frac{1}{r_n}=\frac{n}{r},$$

czyli dla naszego przypadku:

$$\frac{1}{R}=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}\ \Omega^{-1},$$

czyli $R = 2\ \Omega$

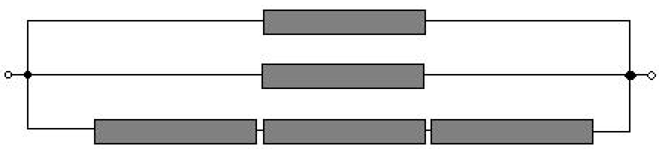
Gdy przez każdą z pierwszych trzech gałęzi układu płynie prąd o natężeniu 1 ampera, to przez czwartą, która pozostaje pod takim samym napięciem a ma opór dwa razy większy, płynie tylko $\frac{1}{2}$ ampera. Całkowite zatem dopuszczalne obciążenie układu wynosi 3,5 A.

B. Opór całkowity 3 Ω (rys. 2). Sprawdzamy analogicznie jak poprzednio:

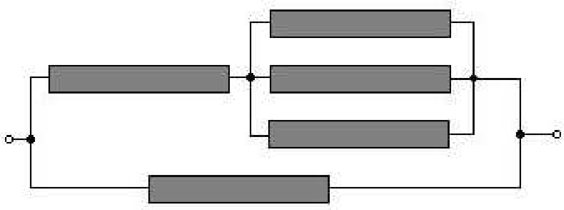
$$\frac{1}{R}=\frac{2}{7}+\frac{1}{21}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}\ \Omega^{-1},$$

czyli R = 3 Ω

C. Opór całkowity 4 Ω (rys. 3). Opór górnej gałęzi wynosi:



Rys. 2



Rys. 3

$$r_1=\frac{7}{3}+7=28\ \Omega,$$

a stąd opór całego układu:

$$\frac{1}{R}=\frac{3}{28}+\frac{1}{7}=\frac{1}{4}\ \Omega^{-1},$$

czyli R = 4 Ω.

Przez dolną gałąź może płynąć prąd o natężeniu co najwyżej i_2 = 1 A. Ponieważ natężenia prądu w obu gałęziach są odwrotnie proporcjonalne do oporów, tzn.:

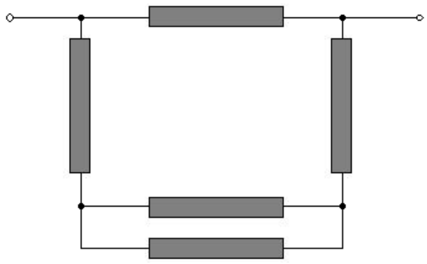
$$\frac{i_1}{i_2}=\frac{r_2}{r_1},$$

więc

$$i_1=i_2\frac{r_2}{r_1}=1\frac{3\cdot 7}{28}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}\ \mathrm{A}.$$

Obciążenie dopuszczalne wynosi zatem: $\frac{3}{4}+1=1{,}75\,\mathrm{A}$.

D. Opór całkowity 5 Ω (rys. 4).



Rys. 4

Opór dolnej gałęzi wynosi: $\frac{7}{2}+14=\frac{35}{2}\ \Omega$, więc opór całkowity:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{7}+\frac{2}{35}=\frac{1}{5}\ \Omega^{-1},$$

czyli R = 5 Ω.

Gdy przez górną gałąź płynie prąd o dopuszczalnym natężeniu i = 1 A, wtedy przez dolną płynie prąd o natężeniu:

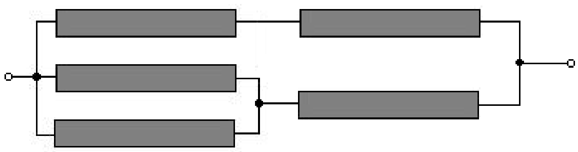
$$i_2 = i_1 \frac{7\cdot 2}{35}=\frac{2}{5}\ \mathrm{A}.$$

Dopuszczalne obciążenie: $\frac{2}{5}+1=1{,}4\ \mathrm{A}$.

E. Opór całkowity 6 Ω (rys. 5). Opór górnej gałęzi wynosi 14 Ω, a opór dolnej $\frac{7}{2}+7=\frac{21}{2}\ \Omega$. Stąd:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{14}+\frac{2}{21}=\frac{7}{42}=\frac{1}{6}\ \Omega^{-1},$$

czyli R = 6 Ω.



Rys. 5

Najbardziej narażony jest tutaj pojedynczy opór w dolnej gałęzi. Jeśli założymy, że przez dolną gałąź płynie prąd o natężeniu 1 A, zaś natężenie prądu w górnej gałęzi oznaczymy przez i_1, wtedy:

$$i_1 : 1 = \frac{21}{2} : 14,$$

$$i_1 = \frac{21}{2 \cdot 14} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}\ \mathrm{A}.$$

Dopuszczalne obciążenie układu: $\frac{3}{4} + 1 = 1{,}75\ \mathrm{A}$.

F. Opór całkowity 7 Ω (rys. 6). Przez środkowy opór prąd nie płynie, a więc:

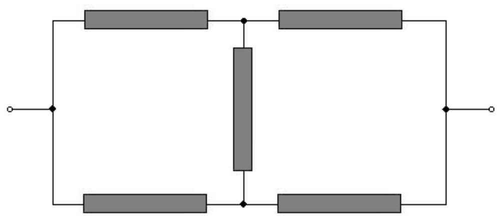
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7}\ \Omega^{-1},$$

czyli R = 7 Ω.

Dopuszczalne obciążenie wynosi 2 A.

Zadanie nie ma ogólnej metody rozwiązania. Rozwiązywanie jego polega raczej na cierpliwym sprawdzaniu wszystkich możliwych układów połączeń. Pewne ułatwienie może przynieść następujące podsumowanie.

Aby z 5 danych oporów otrzymać żądany opór R musimy połączyć szeregowo x, a równolegle 5 – x oporów. Zgodnie z prawem Kirchhoffa możemy napisać:



Rys. 6

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{7x} + \frac{5-x}{7}.$$

Otrzymujemy więc równanie kwadratowe

$$Rx^2 + (7 - 5R)x - R = 0,$$

skąd

$$x_{1;2} = \frac{5R - 7 \mp \sqrt{29R^2 - 70R + 49}}{2R}.$$

Gdy R = 2 Ω mamy:

$$x_{1;2} = \frac{3 \mp \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \mp 5}{4},$$

czyli:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ i } \quad x_2 = 2.$$

Odpowiedź ujemną odrzucamy jako mniemającą treści fizycznej. Otrzymaliśmy więc, że muszą być dwa opory połączone szeregowo, a równolegle (5 – 2) = 3, co jest zgodne z poprzednio otrzymanymi wynikami.

Gdy R = 3 Ω

$$x_{1;2} = \frac{8 \mp \sqrt{100}}{6} = \frac{4 \mp 5}{3},$$

czyli

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \qquad x_2 = 3.$$

Wynika stąd, że muszą być wówczas trzy opory połączone szeregowo, równolegle – dwa.

Dla $R \geq 4\,\Omega$ metoda ta zawodzi – otrzymujemy na x liczby niewymierne. Jest to zrozumiale – nie wystarcza już bowiem, jak to widać z rozwiązań, proste łączenie szeregowe lub równoległe w gałęziach.

Spróbujmy zastosować inną metodę rozumowania. Weźmy pod uwagę przypadek C. Żądany opór układu jest 4 Ω. Zakładając, że ostateczny rezultat mieszanego łączenia oporów oblicza się ze wzoru:

$$\sum_i \frac{1}{r_i} = \frac{1}{R},$$

gdzie r_i oznacza opór łączonych równolegle gałęzi, kładziemy na R = 4 Ω, stąd $\frac{1}{R} = \frac{1}{4}$. Ponieważ dane opory mają po 7 Ω, więc mianownik musi być wyrażony wielokrotnością liczby 7 podzielną przez 4, a więc np. 28, 56… Przypuśćmy, że $\frac{1}{R} = \frac{7}{28}$. Staramy się rozbić tę liczbę na sumę takich składników, które można by uznać za opory łączonych równolegle gałęzi, np. $\frac{7}{28} = \frac{4}{28} + \frac{3}{28}$. Opór $\frac{28}{4} = 7\,\Omega$ jest to jeden z danych oporów. Opór $\frac{28}{3} = 7 + \frac{7}{3}$; jest to jak widać opór gałęzi złożonej z połączonych szeregowo: jednego oporu 7 Ω i trzech oporów równoległych. Podobne rozumowania można przeprowadzić i dla innych przypadków.