I OLIMPIADA FIZYCZNA (1951/1952). Stopień I, zadanie doświadczalne – D.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Stefan Czarnecki; Olimpiady Fizyczne I – IV. PZWS, Warszawa 1956.

Nazwa zadania: Wyznaczenie masy monety za pomocą sprężyny.

Działy: Dynamika

Słowa kluczowe: wyznaczanie masy, masa efektywna, drgania, ruch harmoniczny, okres, amplituda, częstość drgań, prawo Hooke'a, stała sprężystości, sprężyna, moneta, zegarek.

Zadanie doświadczalne - D, zawody I stopnia, I OF.

Dany jest następujący sprzęt:

1) sprężyna z drutu (można użyć drutu stalowego o średnicy około ½ mm i zwinąć go na wałku o średnicy około 1 cm),
2) zegarek ze wskazówką sekundową,
3) mocna nitka,
4) odważniki (można je sporządzić z monet 5-cio groszowych, przyjmując masę jednej monety – 3 g).

Podaj sposób wyznaczenia przy pomocy tego sprzętu masy jedno-złotowej monety. Wykonaj zaprojektowane doświadczenie i prześlij szczegółowe notatki z przeprowadzonego pomiaru. Staraj się ocenić dokładność metody.

Uwaga. Nie wolno korzystać lub sporządzać samemu innych pomocy, jak linijki z podziałką itp.

Rozwiązanie

Ciężarek zawieszamy na sprężynce i odciągamy w dół z położenia równowagi. Pozostawiony samemu sobie wykonuje on jak wiemy ruch harmoniczny. Przyśpieszenie skierowane jest do środka drgań i proporcjonalnie do wychylenia x. Współczynnikiem proporcjonalności jest kwadrat prędkości kątowej punktu wykonującego ruch kołowy, którego rzut na średnicę okręgu wykonuje ruch harmoniczny, identyczny co do amplitudy A (rys. 1), okresu i fazy z ruchem naszego ciężarka. Czyli

$$a = -\omega^2 x . \tag{1}$$

Znak minus oznacza, iż zwrot przyśpieszenia a jest przeciwny niż wychylenia x. Z drugiej strony przyśpieszenie a, w myśl drugiej zasady dynamiki Newtona, jest wprost proporcjonalne do siły działającej na ciężarek, a odwrotnie proporcjonalnie do jego masy m. Na siłę działającą składa się siła sprężystości proporcjonalna do odkształcenia sprężyny $F = -kx$ (prawo Hooke'a) oraz siła ciężkości, która jako stała, nie odgrywa tu roli.
Mamy więc

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m} x , \tag{2}$$

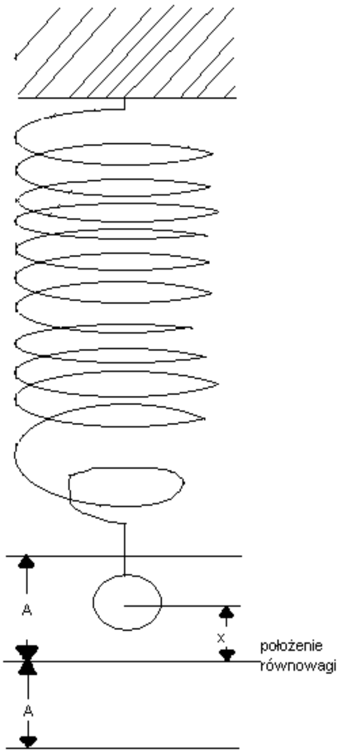
zaś z porównania związków (1) i (2):

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

czyli

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} \quad \text{i} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,; \tag{3}$$

gdzie stała k charakteryzuje daną sprężynę.



Rys. 1

Mamy więc

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x\ , \tag{2}$$

zaś z porównania związków (1) i (2):

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

czyli

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} \quad \text{i} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,; \tag{3}$$

gdzie stała k charakteryzuje daną sprężynę.

W danym przypadku wygodniej posługiwać się nie okresem T, ale częstością n, np. ilością drgań w ciągu minuty:

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{3'}$$

Wzór ten nasuwa nam od razu jeden ze sposobów wyznaczania mas. Trzeba mianowicie określić dla danej sprężyny stałą k, a potem wyznaczyć masy mierząc częstość drgań obciążonej nimi sprężyny. Wydawałoby się, że aby wyznaczyć stałą k wystarczy zmierzyć częstość samej sprężyny bez dodatkowego obciążenia i stałą obliczyć ze wzoru (3') kładąc za m masę tej sprężyny. Postępowanie takie byłoby jednak zupełnie błędne. Masa m jest bowiem rozłożona wzdłuż całej sprężyny, a każdy jej element wykonuje drgania o innej amplitudzie. Trzeba znaleźć masę m_0, którą można by nazwać "masą efektywną". Masa efektywna byłaby to więc taka masa, która zawieszona ba końcu sprężyny o identycznych właściwościach sprężystych jak nasza lecz nie ważkiej, wykonywałaby drgania o takiej samej częstości jak sprężyna nieobciążona, Masa efektywna, jak z tego wynika jest mniejsza od masy sprężyny m.

Masę efektywna możemy znaleźć w sposób następujący: Mierzymy częstość n_0, drgań samej sprężyny, potem zaś częstość n_1 sprężyny obciążonej znaną masą m_1. Ze wzoru (3') mamy

$$k = 4\pi^2 m n^2,$$

skąd dla obu przypadków:

$$k = 4\pi^2 m_0 n_0^2, \tag{4a}$$

$$k = 4\pi^2 (m_0 + m_1)\, n_1^2\,. \tag{4b}$$

Po wyrugowaniu k otrzymujemy

$$m_0 = \frac{m_1 n_1^2}{n_0 - n_1^2}\,. \tag{5}$$

Podstawiając znaleziono m_0 do (4a) znajdujemy k.

Równanie, z którego można wyznaczyć masę M ma postać:

$$k = 4\pi^2 (m_0 + M)\, n^2,$$

skąd

$$M = \frac{k}{4\pi^2 n^2} - m_0\,.$$

Podstawiając k z (4a) otrzymamy:

$$M = \frac{m_0 n_0^2}{n^2} - m_0\,,$$

czyli

$$M = m_0 \frac{n_0^2 - n^2}{n^2}\,. \tag{6}$$

Widać z tego, że można się obyć bez liczbowego wyznaczania stałej k.

Oto dane doświadczenie zaczerpnięte z pracy nadesłanej przez jednego z uczestników z okręgu warszawskiego.

Sprężyna została wykonana z drutu z miękkiej stali o średnicy 0,62 mm i długości 11,08 m przez nawinięcie na wałku o średnicy 1,1 cm. Po zdjęciu z wałka średnica sprężyny wynosiła 15,8 mm a długość około 60 cm. Sprężyna miała 223 zwoje a masa jej wynosiła 26,1 g. Umocowana została jednym końcem, drugi zwisał swobodnie. Do swobodnego końca sprężyny przymocowano różne masy (różne ilości monet 5-groszowych lub monetę 1-złotową) i mierzono ilość drgań na minutę posługując się zegarkiem ze wskazówką sekundową. Każdy pomiar wykonywano pięciokrotnie i brano średnią. Otrzymano następujące wyniki:

1) sprężyna nie obciążona wykonywała w ciągu minuty 122 drgania, czyli $n_0 = 122\ \text{min}^{-1}$;
2) z jedną monetą 5-groszową $(m_1 = 3\ \text{g}) - n_1 = 110\ \text{min}^{-1}$;
3) z dwiema monetami 5-groszowymi $(m_2 = 6\ \text{g}) - n_2 = 104\ \text{min}^{-1}$;
4) z trzema monetami 5-groszowymi $(m_3 = 9\ \text{g}) - n_3 = 94\ \text{min}^{-1}$;
5) z jedną monetą 1-złotową $(M = ?) - n = 98{,}5\ \text{min}^{-1}$.

Zakładając, że obciążenia są na tyle małe, że nie przekraczają granicy sprężystości możemy użyć wypowiedzianych wyżej wzorów.
Ze wzoru (5) mamy:

$$m_0 = \frac{m_1\, n_1^2}{n_0^2 - n_1^2} = \frac{3\left(110\right)^2}{\left(122\right)^2 - \left(110\right)^2}\ \text{g} = \frac{36300}{2784}\ \text{g} \cong 13{,}039\ \text{g}\,.$$

Dla znalezienia m_0 możemy posłużyć się wielkościami m_2 i n_2 oraz m_3 i n_3:

$$m_0 = \frac{m_2 n_2^2}{n_0^2 - n_2^2} \cong 13{,}070\ \text{g}\,;$$

$$m_0 = \frac{m_3 n_3^2}{n_0^2 - n_3^2} \cong 13{,}148\ \text{g}\,.$$

Zgodność jest dość dobra, ale widać, że nie jest celowe zachowywanie w średniej wartości dalszych niż pierwsze miejsce po przecinku; zatem

$$m_0 = \frac{13{,}039 + 13{,}070 + 13{,}148}{3}\ \text{g} \quad \cong \quad 13{,}1\ \text{g}\,.$$

Zgodnie z przewidywaniami masa efektywna wypadła mniejsza od rzeczywistej masy sprężyny:

$$m_0 < m, \qquad m_0 \cong 46\%\ m.$$

Mając już m_0 możemy korzystając ze wzoru (6) wyznaczyć szukana masę monety 1-złotowej:

$$M = 13{,}1\,\frac{\left(122\right)^2 - \left(98{,}5\right)^2}{\left(98{,}5\right)^2}\ \text{g} \cong 6{,}997\ \text{g} \cong 7\ \text{g}\,.$$

Dokładność pomiaru. Ze wzoru (6) widać, że wielki wpływ na dokładność pomiaru masy M ma dokładność, z jaką udało się nam wyznaczyć masę efektywną sprężyny m_0. Wartość m_0 w poszczególnych pomiarach wynosiła: 13,039 g; 13,070 g i 13,148 g; przyjęliśmy wartość średnią $m_0 = 13{,}1$ g. Błędy poszczególnych pomiarów względem średniej kolejno wynosiły $\Delta m_0 = -0{,}06$ g; -0.03 g; $+0{,}048$ g. Pochodzą one z błędu przy pomiarze częstości, choć nie jest wykluczone, że mają wpływ odstępstwa od prawa Hooke'a przy wzrastającym obciążeniu (wskazywałoby na to systematyczne wzrastanie wartości m_0 przy wzroście obciążenia). Za błąd graniczny masy efektywnej możemy przyjąć $\Delta m_0 = 0{,}06$ g.

Dla oszacowania błędu granicznego M najlepiej posłużyć się różniczką zupełną, ale nie znając rachunku różniczkowego też można znaleźć drogę, choć dłuższą, jednak prowadzą do celu. Błąd w pomiarze częstości przy starannym liczeniu drgań nie może być duży, a z uwagi na to, że brano średnie pięciu pomiarów można przyjąć $\Delta n = 0{,}2\ \text{min}^{-1}$. Graniczny błąd M otrzymamy przyjmując np. $\Delta m_0 = +\,0{,}6$ g; $\Delta n_0 = +\,0{,}2\ \text{min}^{-1}$; $\Delta n = -\,0{,}2\ \text{min}^{-1}$ i wartości obarczone tymi błędami podstawiając do wzoru (6):

$$M' = 13{,}16\,\frac{\left(122{,}2\right)^2 - \left(98{,}3\right)^2}{\left(98{,}3\right)^2}\ \text{g} \cong 7{,}18\ \text{g}\,,$$

$$\Delta M = M' - M = 0{,}18\ \text{g} \cong 0{,}2\ \text{g}\,,$$

tj. około 3%. Masa monety jednozłotowej wynosi zatem $(7 \pm 0{,}2)$ g.

Jeden z uczestników proponuje nieco inną metodę pomiaru. Mianowicie można dobrać taką ilość monet pięciogroszowych a potem jednozłotowych, by przy obciążeniu sprężyny zarówno pierwszymi jak i drugimi uzyskać tę samą częstość drgań. Dobrane w ten sposób grupy monet będą miały masy równe. W danym przypadku jednakowe częstości otrzymalibyśmy np. Przy 7 pięciogroszówkach i 3 złotówkach (7 · 3 g = 21 g; 3 · 7 g = 21 g),, a także przy obciążeniu 42 g, 63 g, … aż do kresu sprężystości sprężyny. Przy tej metodzie nie odgrywają roli odstępstwa od prawa Hooke'a, ale jest to metoda długa i niewygodna, prosta jedynie w przypadku, gdy masa złotówki jest niewielka i całkowita.

Można by przytoczyć jeszcze inną, bardzo prostą, czysto empiryczną metodę, choć dla wyznaczenia niewielkich mas niezbyt dokładną. Można wykreślić z danych doświadczalnych krzywą przedstawiającą częstość drgań sprężyny jako funkcję masy na niej zawieszonej a następnie z tej krzywej odczytać szukaną masę (rys.).

Ogólnie biorąc zadanie wypadło nieźle; przeciętna ocena – 5,4 punktu na 10 możliwych.