XIX OLIMPIADA FIZYCZNA (1969/1970). Etap I, zadanie doświadczalne – D.

Źródło: Waldemar Gorzkowski, Olimpiady Fizyczne XIX i XX, WSIP, Warszawa 1974

Autor: Waldemar Gorzkowski, KG OF

Nazwa zadania: Stygnięcie wody

Działy: Termodynamika

Słowa kluczowe: Stygnięcie wody, zależność temperatury od czasu stygnięcia

Zadanie 4, doświadczalne – D, zawody stopnia I, XIX OF.

Kulistą część kolby napełnij gorącą wodą (0,5 ÷ 1 L).Wyznacz doświadczalnie zależność temperatury wody od czasu podczas stygnięcia. Następnie przyjmując, że przy ustalonej temperaturze otoczenia temperatura nagrzanego ciała obniża się z biegiem czasu według wzoru

$$T(t) = \alpha 2^{-\frac{t}{\tau}} + T_0$$

(*t* – czas, T_0 - temperatura otoczenia, $T(t)$ - temperatura ciała w chwili *t*, α i τ. Powtórz doświadczenie używając tej samej masy wody, lecz wąskiej zlewki zamiast kolby. Jaki sens fizyczny mają stałe α i τ? Czy w obu przypadkach wartość stałej τ jest taka sama? Uzasadnij odpowiedź. Co zrobiłeś, by osiągnąć większą dokładność wartości α i τ ?

Rozwiązanie

Sprawdzanie prawa w takiej postaci, jak podana w tekście zadania jest dość kłopotliwe. Jak powiedzieliśmy już w rozwiązaniu zadania 4 ze stopnia wstępnego, wszędzie, gdzie tylko jest to możliwe, warto sprawdzoną zależność doprowadzić do takiej postaci, której graficznym obrazem jest linia prosta. W naszym wypadku łatwo to osiągnąć.
Zależność nasza ma postać:

$$T(t) = \alpha 2^{-\frac{t}{\tau}} + T_0$$

Przenieśmy T_0 na lewą stronę i zlogarytmujmy obustronnie. Otrzymamy:

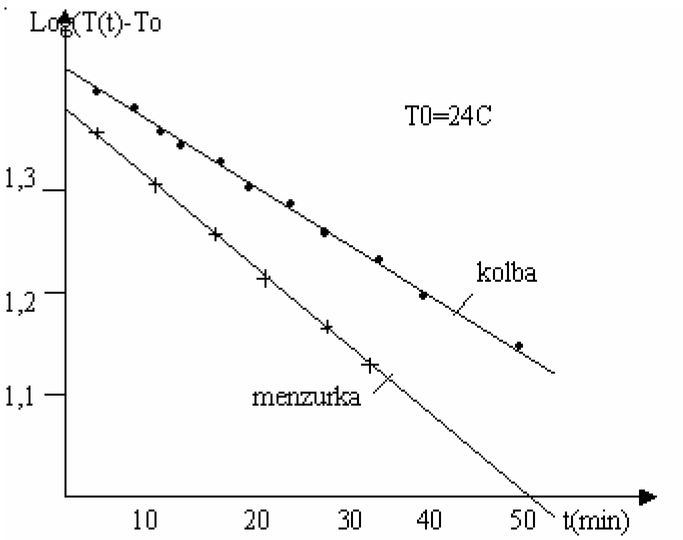
$$\log[T(t) - T_0] = \log\alpha - \frac{t}{\tau}\log 2.$$

Widzimy, że zależność $\log[T(t) - T_0]$ od czasu *t* jest już zależnością liniową. Korzystając z powyższej zależności, wielkości α i τ można wyznaczyć graficznie i to znacznie prościej i dokładniej niż z pierwotnej zależności wykładniczej. Wielkość τ wchodzi do współczynnika kierunkowego prostej, równego $-\frac{1}{\tau}\log 2$, a wielkość α – do wyrazu wolnego, oznaczającego punkt przecięcia prostej z osią rzędnych, równego $\log\alpha$. Tak wiec, z wykresu $\log[T(t) - T_0]$ od *t* możemy wyznaczyć $-\frac{1}{\tau}\log 2$ oraz $\log\alpha$, a stąd można już obliczyć α i τ.

Przykład takiego wykresu dla typowej kolby i menzurki (o pojemnościach równych 500 mL) pokazano na rysunku 1. Pomiary temperatury wykonywano co 2,5; 5 lub 10 minut posługując się termometrem o podziałce co 0,5˚C. Temperatura otoczenia w czasie pomiarów wynosiła $T_0 = 24$ ˚C. Wartości α i τ dla kolby i menzurki, wyznaczone z wykresu równają się

dla kolby: α = 23˚C, τ = 65 min.
dla menzurki: α = 22˚C, τ = 49 min.

Niepewność pomiarową wyznaczenia parametrów α i τ można oszacować w następujący sposób. Przez punkty doświadczalne prowadzi się kilka prostych, które do nich „pasują”. Następnie dla prostych tych wyznacza się α i τ i bierze pod uwagę wartości skrajne. Łatwo przekonać się, że w naszym przypadku błąd α nie przekracza 0,5˚ C, a niepewność τ – 1 min. Istnieją zupełnie dokładne metody określania niepewności pomiarowej parametrów prostej doświadczalnej. Są one jednak zbyt złożone, by je omawiać. Musimy zadowolić się metodą, którą opisaliśmy. Metoda ta w praktyce okazuje się wystarczająco dokładna.



Rys. 1.

Niepewność pomiarowa wyznaczona na podstawie przebiegu prostej doświadczalnej będzie oczywiście tym mniejsza, im same punkty pomiarowe będą dokładniej wyznaczone (wtedy „rozrzut” punktów jest mniejszy) i im tych punktów będzie więcej. Tak więc, do doświadczenia należy użyć termometru o możliwie dokładnej skali, zwracać uwagę na prawidłowy odczyt i wyznaczyć możliwie dużo punktów doświadczalnych.

Poza tym na dokładność pomiarów wpływa to, czy T_0 jest stałe. Zmianę T_0 może wywołać np. otworzenie okna.

Jaki jest sens fizyczny parametrów α i τ ? Otóż znaczenie fizyczne tych parametrów staje się widoczne po podstawieniu do wzoru na $T(t)$ wartości $t = 0$ i $t = \tau$. Otrzymujemy wtedy

$$\alpha = T(0) - T_0$$

oraz

$$T(\tau) - T_0 = \frac{1}{2}\left[T(0) - T_0\right].$$

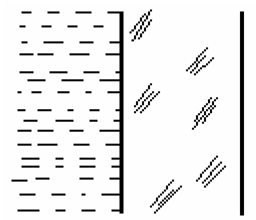
Zatem α oznacza różnicę temperatur wody i otoczenia w chwili początkowej, a τ – czas, po jakim ta różnica zmniejszy się 2 razy. Jasne jest, że im większe τ, tym stygnięcie jest wolniejsze.

Na podstawie wyników doświadczenia widzimy, że woda w kolbie stygnie wolniej niż woda w menzurce. Czym to jest spowodowane? Otóż ciepło z naczynia przepływa na zewnątrz poprzez ściankę naczynia. Jasne jest, że proces ten jest tym wolniejszy im powierzchnia ścianek jest mniejsza, a wiemy, że przy danej objętości bryły najmniejszą powierzchnię ma powierzchnia kuli. Woda w kolbie kulistej powinna więc stygnąć wolniej niż w menzurce, co istotnie się obserwuje. (Grubości i własności cieplne szkła typowej menzurki i kolby zwykle są do siebie zbliżone. W każdym bądź razie są one na tyle bliskie siebie, że opisane zjawisko daje się zaobserwować.)

W opisywanym tu doświadczeniu temperatura wody była wyższa od temperatury otoczenia o 22˚C - 23˚C. Gdyby różnica ta była 2 – 3 razy większa, to można by zaobserwować ciekawe zjawisko, a mianowicie krzywa doświadczalnie byłaby dokładnie prosta. Odchylenie od prostej byłoby wprawdzie nie duże, ale jednak widoczne. Początkowy odcinek krzywej byłby bardziej stromy niż jej odcinek końcowy, prostoliniowy. Przyczyna tego jest parowanie na powierzchni wody. Oczywiście zjawiska tego można się pozbyć, na przykład zatykając kolbę watą lub też wpuszczając do wody kroplę oleju. Jednak gdy woda ma możliwość parowania, jego wpływ na krzywą daje się zaobserwować.

Pewnie ciekawi Was, skąd wziął się wzór podany w zadaniu. Spróbujmy więc go wyprowadzić. Wprawdzie w pewnym miejscu będziemy musieli skorzystać z faktu, który wykracza poza program sądzę jednak, że warto się tym zająć. Dla uproszczenia załóżmy, że temperatura w kolbie w każdym punkcie jest taka sama. W praktyce nie jest to zupełnie ścisłe, jednak zwykle prądy konwekcyjne wewnątrz wody dość szybko likwidują ewentualne różnice temperatur. Poza tym załóżmy, że temperatura wokół kolby tuż przy jej powierzchni jest stała. Podobnie jak poprzednio, założenie to nie jest w pełni prawdziwe, jednak ze względu na prądy konwekcyjne w powietrzu otaczającym kolbę jest ono dość dobrze spełnione. Na koniec załóżmy jeszcze, że grubość szkła kolby jest znacznie mniejsza niż jej promień.

Przy tych założeniach jedynym mechanizmem związanym ze stygnięciem wody jest przewodnictwo cieplne ścianek, przy czym ze względu na duży promień kolby w stosunku do grubości ścianek możemy przyjąć, że w otoczeniu dowolnego punktu powierzchni kolby ciepło jest przewodzone tak, jakby ścianka byłą płaska. Weźmy wiec pod uwagę cienką ściankę,



Rys. 2.

(Rys. 2), oddzielającą dwa ośrodki o temperaturach T_0 i T. Niech T_0 będzie stałe. Z teorii przewodnictwa cieplnego wiemy, że ciepło Q przewodzone przez ściankę w czasie Δt jest proporcjonalne do $T(t) - T_0$:

$$Q = A(T - T_0)\Delta t,$$

A jest tu pewną stałą zależną od własności fizycznych i rozmiarów geometrycznych ścianki. Wielkość Q jest proporcjonalna do zmiany temperatury wody:

$$Q = B\Delta T$$

Stałą B zależy od masy wody i jej ciepła właściwego. Zatem

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = C(T - T_0)\ ; \qquad C = \frac{A}{B}.$$

Łatwo zauważyć, że $\Delta T = \Delta(T - T_0)$. Uwzględniając to i przechodząc do granicy otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}(T - T_0) = C(T - T_0); \qquad \text{C- stała.}$$

W ten sposób uzyskaliśmy równanie różniczkowe na $(T - T_0)$. Rozwiązanie tego równania wykracza poza program, toteż podamy je w gotowej postaci

$$T - T_0 = De^{Ct} \,,$$

gdzie D jest pewną stałą, a e liczbą niewymierną równą 2,718281...
Korzystając z tego, że $a^{\log_a y} = y$ możemy napisać:

$$T - T_0 = D\, 2^{tC\log_2 e} \,,$$

a ten związek różni się od wzoru podanego w tematyce jedynie nazwami stałych oraz tym, że T_0 występuje z lewej strony.