XVII OLIMPIADA FIZYCZNA(1968/1969). Stopień III, zadanie teoretyczne – T2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Czesław Ścisłowski: Olimpiady fizyczne XVII i XVIII. PZWS, Warszawa 1971.

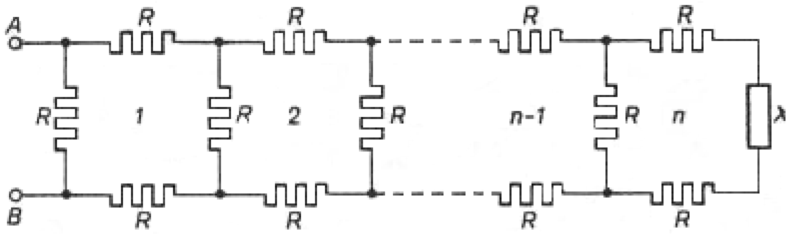
Nazwa zadania: Opór zastępczy układu jednakowych oporników.

Działy: Elektryczność.

Słowa kluczowe: opór zastępczy, łączenie oporników, szeregowe, równoległe, obwód, oczko, sieć.

Zadanie teoretyczne – T1, **zawody III stopnia**, **XVII OF**.

Jaki powinien być opór X, aby opór obwodu R_{AB} (rys.1) nie zależał od liczby n powtarzających się identycznych elementów tego obwodu?



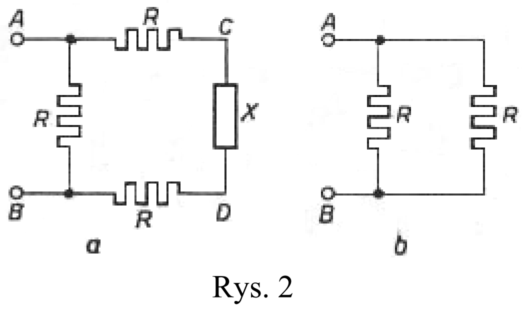
Rys. 1

Rozwiązanie

Sposób 1.

Jeżeli opór X ma taką wartość, że opór R_{AB} nie zależy od liczby n „oczek” obwodu (n = 1, 2,…), to opór R_{AB} w tych przypadkach jest jednakowy. Z rysunku 2a widać, że w obwodzie $ACDB$ mamy opory połączone szeregowo. Zatem obwód ten możemy zastąpić obwodem przedstawionym na rysunku 2b pamiętając, że $R_1 = 2R + X$.

Opór R_1 włączony jest wówczas równolegle do oporu R. Wynika stąd, że opór obwodu AB wyliczyć można z następującej zależności:



Rys. 2

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + X}$$

$$R_{AB} = \frac{R(2R + X)}{3R + X}$$

Dla $n = 2$ opór zastępczy R' oczka 2 wynosi R_{AB}. Zatem

$$R' = \frac{R(2R+X)}{3R+X}$$

Jest on włączony szeregowo do oporu R między AC i oporu R między BD. Zatem opór zastępczy tak połączonych oporów w oczku 1 wynosi

$$R'' = 2R - \frac{R(2R+X)}{3R+X} = \frac{R(8R+3X)}{3R+X}$$

Wówczas opór obwodu AB wyliczymy z zależności

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{3R+X}{R(8R+3X)}$$

Z warunków podanych w treści zadania wynika, że opory RAB występujące w zależnościach (1) i (2) są sobie równe. Zatem

$$\frac{1}{R} + \frac{3R+X}{R(8R+X)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R+X}.$$

Po wykonaniu działań i uporządkowaniu otrzymujemy równanie drugiego stopnia względem X

$$X^2 + 2RX - 2R^2 = 0.$$

Wyróżnik w tym równaniu wynosi

$$\Delta = 4R^2 + 8R^2 = 12R^2, \quad \sqrt{\Delta} = 2R\sqrt{3}.$$

Właściwe rozwiązanie jest wówczas, gdy

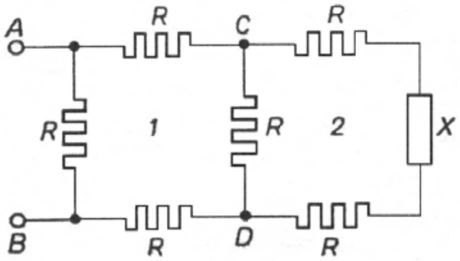
$$X = (\sqrt{3} - 1)R.$$

Sposób 2.

Z warunków zadania wynika, że opór R_{AB} obwodu nie zależy od liczby elementów (oczek), gdy ostatnie oczko zastąpimy oporem X. Można wyliczyć, jak podano w sposobie 1, że opór ostatniego oczka n wynosi

$$R_n = \frac{R(2R+X)}{3R+X}.$$

Opór między punktami AB jest niezależny od liczby oczek tylko wtedy, gdy opór X będzie taki, że włączony między punkty CD, zamieni element (oczko) jak na rysunku 3 nie zmieni oporu między tymi punktami. A więc opór $X = R_n$, czyli



Rys.3

$$X = R_n = \frac{R(2R+X)}{3R+X}.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy: $X^2 + 2RX - 2R^2 = 0$.

Właściwym rozwiązaniem jest $X = (\sqrt{3} - 1)R$.

Zmniejszając liczbę elementów (oczek) w obwodzie można zamiast przedstawionego na rysunku 1 zestawu włączyć między punkty *AB* opór *X* taki, że

$$X = R_{AB} = \left(\sqrt{3 - 1}\right)R.$$