XVII OLIMPIADA FIZYCZNA(1968/1969). Stopień III, zadanie teoretyczne – T1

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Czesław Ścisłowski: Olimpiady fizyczne XVII i XVIII. PZWS, Warszawa 1971.

Nazwa zadania: Warunki przecięcia się promieni światła po załamaniu w kuli.

Działy: Optyka geometryczna.

Słowa kluczowe: współczynnik załamania, promień, światło, ośrodek, kąt, padania, załamania, prawo Snelliusa.

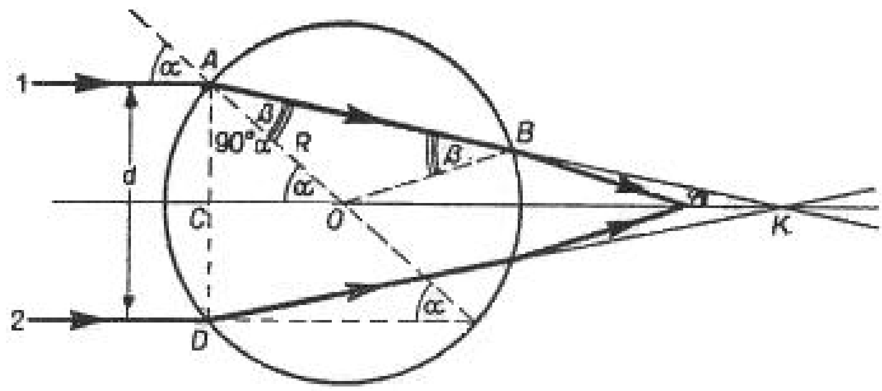
Zadanie teoretyczne – T1, zawody III stopnia, XVII OF.

W ośrodku o współczynniku załamania równym 1 znajduje się optycznie jednorodna przezroczysta kula o współczynniku załamania $n > 1$. Promień kuli wynosi R. Na kulę padają symetrycznie względem środka dwa równoległe promienie odległe o $d < 2R$.

1) Jaki warunek powinny spełniać d oraz n na to, aby promienie przecięły się na zewnątrz kuli?
2) Ustalić, jaki musiałby być współczynnik załamania n, aby promienie przecięły się na zewnątrz kuli dla dowolnego $d < 2R$?
3) Ustalić, jaki musiałby być współczynnik załamania n, aby promienie, nie przecięły się na zewnątrz dla żadnego d.

Rozwiązanie

Sposób 1. Jako ośrodek o współczynniku załamania równym jedności możemy przyjąć powietrze. Ponieważ promienie *1* i *2* są symetryczne względem środka kuli O, tworzą z tym punktem jedną płaszczyznę. Opisane w treści zadania zjawisko zachodzi zatem w płaszczyźnie, która przecina kulę wzdłuż koła wielkiego (rys. 1). Punkt K jest przecięciem się kierunków promieni *1* i *2* biegnących w kuli.



Rys. 1

Z trójkąta AOK wynika:

$$\frac{AO}{\sin\varphi} = \frac{OK}{\sin\beta}$$

zaś z trójkąta ACK

$$\varphi = 90° - [(90° - \alpha) + \beta] = \alpha - \beta ,$$

Uwzględniając te zależności możemy napisać, że

$$OK = \frac{R\sin\beta}{\sin\varphi} = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

Rozwijamy wyrażenie znajdujące się w mianowniku ostatniej zależności i wprowadzamy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n .$$

A zatem

$$OK = \frac{R}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \sqrt{1-\sin^2\alpha}} .$$

Ale $AC + CD = d = 2R\sin\alpha$. Z równania tego $\sin\alpha = \frac{d}{2R}$.

Zatem

$$OK = \frac{R}{\sqrt{n^2 - \frac{d^2}{4R^2}} - \sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}}} .$$

Aby promienie 1 i 2 przecięły się na zewnątrz kuli, musi być $OK > R$, czyli

$$\frac{R}{\sqrt{n^2 - \frac{d^2}{4R^2}} - \sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}}} > R .$$

A więc

$$\sqrt{n^2 - \frac{d^2}{4R^2}} - \sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}} < 1 .$$

Po rozwiązaniu tej nierówności otrzymamy, że

$$n^2 < 2 + 2\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}} ,$$

Skąd

$$-\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}}} < n < \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}}} .$$

Z warunków zadania wiemy, że $n > 1$, zatem

$$1 < n < \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}}} .$$

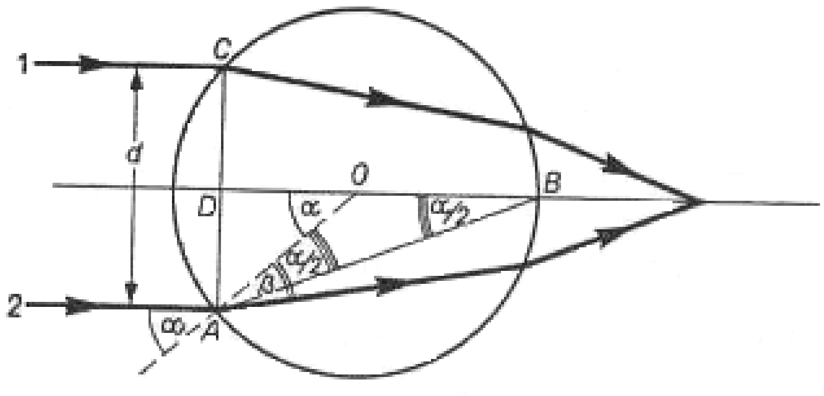
Wyrażenie

$$\alpha = \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}}} ,$$

dla $d = 2R$ przyjmuje wartość minimalną $a_{\min} = \sqrt{2}$, a dla $d = 0$ – maksymalną $a_{\max} = 2$.
A zatem promienie przetną się na zewnątrz kuli dla każdej wartości $d < 2R$, gdy $1 < n \leq 2$.

Promienie *1* i *2* nie przetną się na zewnątrz kuli dla żadnej wartości *d* zawartej w przedziale $0 < d < 2R$, gdy $n \geq 2$, ponieważ zależność

1) nie zachodzi dla żadnego *d*.



Rys.2

Sposób 2. Z rysunku 2 widać, że promienie *1* i *2* przetną się na zewnątrz kuli, w punkcie leżącym na prawo od punktu *B*, gdy kąt załamania *β* będzie większy od $\frac{\alpha}{2}$, $\beta > \frac{\alpha}{2}$. Gdy $\beta = \frac{\alpha}{2}$ przecięcie nastąpi w punkcie *B*. Natomiast, gdy $\beta < \frac{\alpha}{2}$ przecięcie nastąpi wewnątrz kuli. Z rysunku widać, że

$$AC = d = 2AD = 2R\sin\alpha\ ,$$

zatem

$$\sin\alpha = \frac{d}{2R}\ .$$

Ale

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,,$$

A ponieważ przecięcie nastąpi wówczas, gdy $\beta > \frac{\alpha}{2}$,czyli, gdy $\sin\beta > \sin\frac{\alpha}{2}$, zatem

$$n < \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,,$$

i stąd

$$n < 2\cos\frac{\alpha}{2}\,,$$

inaczej

$$n < 2\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}\ .$$

Podstawiając do tego wzoru wyrażenie na $\sin\alpha$ z równania (1) otrzymamy:

$$n < \sqrt{2+\sqrt{4-\frac{d^2}{R^2}}}$$

Jest to odpowiedź na drugie pytanie postawione w treści zadania. Z rysunku 2 widać, że *d* może przybierać wartości od zera do $2R$

$$0 \leq d \leq 2R$$

Można zatem obliczyć graniczną wartość współczynnika załamania światła n, dla którego nie jest możliwe, niezależnie od wartości d, przecięcie się promieni *1* i *2* na zewnątrz kuli. Ma to miejsce dla

$$n_{\text{gr}} = \lim_{d \to 2R} \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{d^2}{R^2}}} = \sqrt{2}\,.$$

A zatem rozpatrywane promienie przetną się na pewno na zewnątrz kuli, gdy

$$1 < n < \sqrt{2}\,.$$

Promienie mogą się przeciąć wewnątrz kuli, gdy

$$n > \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{d^2}{R^2}}}$$

W szczególnym przypadku

$$n_{\text{gr}} = \lim_{d \to 0} \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{d^2}{R^2}}} = 2$$

A zatem dla $n > 2$ następuje przecięcie się promieni wewnątrz kuli niezależnie od wielkości d. Przeprowadzone uprzednio rozumowanie można ująć w następującą tabelę.

n	Miejsce przecięcia się promieni.
$1 < n < 2$	Promienie przecinają się na zewnątrz kuli, niezależnie od wielkości *d.*
$\sqrt{2} < n < 2$	Promienie przecinają się na zewnątrz kuli, gdy $n < \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{d^2}{R^2}}}$ Promienie przecinają się wewnątrz kuli, gdy $n > \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{d^2}{R^2}}}$
$n > 2$	Promienie przecinają się wewnątrz kuli, niezależnie od wielkości *d.*