XVI OLIMPIADA FIZYCZNA (1966/1967). Stopień III, zadanie doświadczalne – D.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Tadeusz Pniewski: *Olimpiady Fizyczne* XV i XVI. PZWS, Warszawa 1969, str. 99-104.

Nazwa zadania: Wyznaczanie momentu bezwładności bryłki

Działy: Mechanika

Słowa kluczowe: ciało, bryła sztywna, moment bezwładności, kierujący, siły, ruch obrotowy, oś obrotu, środek ciężkości, masy, wahadło matematyczne, fizyczne, okres.

Zadanie 4 – doświadczalne, zawody III stopnia, XVI OF.

Masz do dyspozycji: statyw z uchwytem, bryłkę o podanej masie, obciążnik na nici, który można traktować jako wahadło matematyczne, przymiar.

Posługując się jedynie podanymi przyrządami, wyznacz moment bezwładności bryły względem osi podanej na bryle. Przeanalizuj dokładność pomiaru.

Rozwiązanie

Moment bezwładności jest jedną z wielkości fizycznych służących do opisu obrotowego ruchu ciał. Równanie ruchu obrotowego ma, jak wiadomo, następującą postać:

$$M = I \cdot \gamma \tag{1}$$

gdzie: M – moment siły działającej na obracające się ciało,
I – moment bezwładności tego ciała,
γ – przyspieszenie kątowe.

Porównując to równanie z równaniem ruchu postępowego:

$$F = ma \tag{2}$$

widzimy, że moment bezwładności jest w ruchu obrotowym wielkością odpowiadającą masie w ruchu postępowym. Jest on miarą bezwładności obracającego się ciała.

Weźmy pod uwagę elementy ciała o masie m_i odległe o r_i od osi obrotu. Moment bezwładności tego elementu względem osi obrotu dany jest wzorem:

$$I_i = r_i^2 \cdot m_i \tag{3}$$

Aby znaleźć moment bezwładności całego ciała, musimy przeprowadzić sumowanie po wszystkich elementach mi:

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i. \tag{4}$$

Widzimy, że moment bezwładności ciała zależy od rozkładu jego masy względem wybranej osi obrotu.

Jeżeli obracające się ciało nie jest złożone z oddzielnych elementów, lecz posiada ciągły rozkład masy, wtedy wzór (4) musi być zastąpiony wyrażeniem całkowym:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m. \tag{5}$$

Obliczanie momentu bezwładności wymaga znajomości kształtu ciała i rozkładu jego masy. Często brak nam tego rodzaju informacji, często zaś nawet, gdy te informacje posiadamy, obliczenie momentu bezwładności sprawia duże trudności rachunkowe, na przykład wówczas, gdy kształt ciała jest skomplikowany.

Celem niniejszego zadania było eksperymentalne wyznaczenie momentu bezwładności bryłki należącej do zestawu przedmiotów, które każdy z zawodników miał do dyspozycji.

Bryłkę należało wprawić w ruch wahadłowy względem zadanej osi obrotu. Bryłka stanowiła wówczas wahadło fizyczne, którego okres wahań zależy od momentu bezwładności i dany jest wzorem:

$$T_\mathrm{f} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}},$$

gdzie I jest momentem bezwładności bryłki, a D – momentem kierującym wahadła.

Żadna z wielkości występujących w tym wzorze nie jest znana. Trzeba więc było wyznaczyć je eksperymentalnie.

W otrzymanym zestawie przedmiotów zawodnik nie posiadał zegarka ani stopera. Pomiar czasu wahadła fizycznego T_f mógł więc polegać na porównaniu go z okresem T_m wahadła matematycznego, za które można było uważać obciążnik zawieszony na nici. Okres wahadła matematycznego wynosi:

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Długość nici l należało dobrać w ten sposób, aby zachodziła równość

$$T_f = T_m$$

wtedy

$$\frac{I}{D} = \frac{l}{g},$$

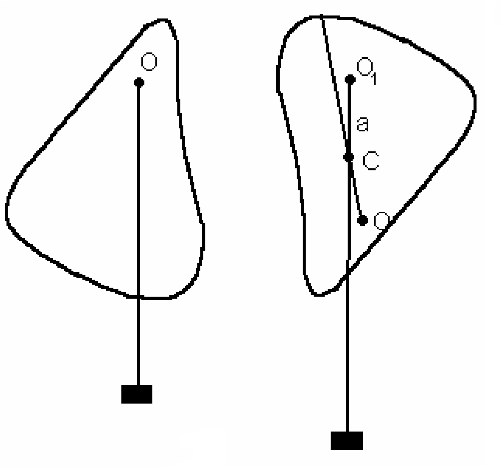
czyli

$$I = \frac{Dl}{g}.$$

Długość wahadła matematycznego mierzono za pomocą przymiaru. W dalszym ciągu nieznana pozostawała wartość momentu kierującego D. Wyraża się on wzorem:

$$D = mgd,$$

gdzie d oznacza odległość bryłki od osi obrotu.



Rys. 1

Środek ciężkości znajdowano zawieszając baryłkę w dwóch różnych punktach zawieszenia (rys. 1). Za każdym razem środek ciężkości leżał na prostej pionowej przechodzącej przez punkt zawieszenia. Kierunek pionowy określano za pomocą obciążnika zawieszonego swobodnie na nici. W ten sposób otrzymano dwie przecinające się proste. Punkt C przecięcia się tych prostych określał położenie środka ciężkości.

Pozostawało jedynie zmierzyć odległość znalezionego środka ciężkości od osi obrotu i obliczyć szukany moment bezwładności ze wzoru:

$$I = mdl.$$

A oto, dla przykładu, wyniki uzyskane przez jednego z zawodników:

Uczeń doprowadził do zrównania okresów obu wahadeł zmieniając odpowiednio długość wahadła matematycznego. Równość tych okresów stwierdził na podstawie 20 wahnięć, podczas których nie wystąpiła dostrzegalna różnica faz między ruchami obu wahadeł. Długość wahadła matematycznego mierzył dziesięciokrotnie. Wykonał również 10 pomiarów odległości środka ciężkości od osi obrotu.

Wyniki tych pomiarów podane są w poniższej tabelce:

l, cm	d, cm
25,0	33,2
25,1	32,6
24,8	32,8
25,0	32,6
24,9	33,0
25,0	32,8
24,7	32,6
25,1	33,0
25,1	32,8
24,9	33,0
$l_{śr}$ = 24,7 cm	$d_{śr}$ = 32,6 cm

Uzyskane rezultaty oraz podana w warunkach zadania masa pozwalały już uczniowi obliczyć moment bezwładności danej bryłki.

Wcześniej jednak uczeń przeprowadził jeszcze analizę niepewności pomiarowych.

Na podstawie wyników pomiarów podanych w tabelce obliczył średnie błędy kwadratowe pomiarów długości wahadła i odległości środka ciężkości od osi obrotu.

Niepewności te wynoszą:

$$\sigma_{l_{śr}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(l_{śr} - l_i)^2}{10 \cdot 9}} = 0{,}05\ \text{cm};$$

$$\sigma_{d_{śr}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(d_{śr} - d_i)^2}{10 \cdot 9}} = 0{,}05\ \text{cm}$$

a odpowiednie niepewności względne:

$$\frac{\sigma_{l_{śr}}}{l_{śr}} = 0{,}2\ \% \quad \text{i} \quad \frac{\sigma_{d_{śr}}}{d_{śr}} = 0{,}2\ \%$$

Ucznia niepokoiły te zbyt małe, jego zdaniem, wartości błędów. Nie portafił jednak wykazać innych źródeł niepewności pomiarowych. Zapomniał o jeszcze jednej mierzonej wielkości. Tą wielkością jest stosunek okresów obu wahadeł. Na podstawie obserwacji 20 wahnięć uczeń stwierdził, że stosunek ten równy jest jedności. Wynik ten jest oczywiście obarczony błędem. W rzeczywistości więc zamiast równości

$$T_\mathrm{m} = T_\mathrm{f},$$

zachodzi równość

$$T_\mathrm{m} = \alpha T_\mathrm{f},$$

gdzie α oznacza współczynnik mogący w granicach niepewności różnić się od jedności.

Jeżeli okres T_f uznać za wielkość znaną bezbłędnie, to znaczy za jednostkę czasu stosowaną w naszym doświadczeniu, wówczas błąd względny popełniany przy pomiarze stosunku α jest równy błędowi względnemu z jakim określamy okres wahadła matematycznego

$$\frac{\Delta T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{m}} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha}..$$

Niepewność w pomiarze okresu T_m pociąga za sobą niepewność pomiaru w dopasowaniu długości wahadła matematycznego.

Długość wahadła matematycznego wyraża się wzorem:

$$l = \frac{g}{4\pi^2} T_\mathrm{m}^2 .$$

Po zróżniczkowaniu po T_m otrzymujemy na bezwzględny błąd długość wahadła l wyrażenie

$$\Delta l = \frac{g}{4\pi^2} 2T_\mathrm{m}\Delta T_\mathrm{m}.$$

stąd względna niepewność pomiarowa ynosi:

$$\frac{\Delta l}{l} = 2\frac{\Delta\alpha}{\alpha}.$$

Spróbujemy ocenić $\Delta\alpha$..

Przyjmijmy, że największa różnica faz między ruchami obu wahadeł, której nie jesteśmy jeszcze w stanie zaobserwować odpowiada 0,1 okresu. Taka, co najwyżej, różnica faz może wystąpić niezauważona po upływie 20 wahnięć.

Stosunek pkresów obu wahadeł wyznaczamy więc z niepewnością względną

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{1}{10\cdot 20} = 0{,}5\ \%.$$

Stąd niepewność popełniana w doborze długości l wahadła matematycznego wynosi

$$\frac{\Delta l}{l} = 1\ \%.$$

Jest to niepewność wyraźnie większa od naszych niepewności pomiaru i on przede wszystkim granicza dokładność wyznaczenia momentu bezwładności.

Uzyskany wynik pomiaru momentu bezwładności badanej bryłki jest następujący:

$$I = (13{,}86 \pm 0{,}14)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2.$$