XV OLIMPIADA FIZYCZNA (1965-1966). Stopień III - zadanie teoretyczne – T1

Źródło: Olimpiady Fizyczne XV i XVI, PZWS Warszawa 1969

Autor: Tadeusz Pniewski

Nazwa zadania: Rakieta

Działy: Kinetyka

Słowa kluczowe: wahadło matematyczne, lot rakiety

Zadanie teoretyczne – T1, zawody III stopnia, XVOF.

Rakietę kosmiczną wystrzelono pionowo do góry. Silniki rakiety działają tylko w pierwszej fazie lotu, nadając rakiecie przyspieszenie $a = 4g$. Zegar wahadłowy znajdujący się w rakiecie wskazywał w chwili startu czas $t_0 = 0$, a w momencie „twardego" lądowania czas $t_1 = 90$s.

Obliczyć maksymalną wysokość osiągniętą przez rakietę. Opór powietrza pominąć. W celu uproszczenia przyjmujemy, że zegar działa na zasadzie wahadła matematycznego.

Rozwiązanie

Wznoszenie rakiety na maksymalną wysokość H można podzielić na dwa etapy: pierwszy, w którym działają silniki i drugi, kiedy silniki skończyły swoją pracę.

$$h_1 = \frac{at^2}{2} \qquad (1)$$

W pierwszej fazie wznoszenia rakieta wystrzelona pionowo do góry z prędkością początkową $v_0 = 0$ porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = -4g$ nadawanym jej przez silniki i przebywa drogę uzyskując prędkość końcową

$$v = at , \qquad (2)$$

gdzie t jest czasem trwania pierwszej fazy ruchu. W drugiej fazie wznoszenia rakieta porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem g^* i prędkością początkową v równą prędkości osiągniętej w momencie wyłączenia silników Wykorzystując zależność otrzymujemy:

$$h_2 = \frac{v^2}{2g}. \qquad (3)$$

Maksymalna wysokość H osiągnięta przez rakietę równa jest sumie dróg, jakie rakieta przebywa w dwóch omówionych fazach wznoszenia:
Podstawiając uzyskamy

$$H = \frac{at^2}{2} + \frac{a^2t^2}{2g} = \frac{at^2}{2}(1 + \frac{a}{g}). \qquad (4)$$

We wzorze tym tylko czas pracy silników nie jest znany. Jedyną informację o czasie stanowią wskazania zegara wahadłowego znajdującego się w rakiecie. Przy uwzględnianiu tej informacji pamiętać należy, że rakieta przez cały czas trwania lotu stanowi nieinercjalny układ odniesienia. Tak więc na przedmiot o masie m działa siła skierowana ku dołowi o wartości:

$$F = ma + mg = m(a + g) \qquad (5)$$

Wahadło matematyczne umieszczone w ruch posiada więc okres wahań:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} \tag{6}$$

podczas, gdy okres ten w układzie spoczywającym wynosi:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{7}$$

Zmiana okresu wahań powoduje, że wskazania zegara w rakiecie są fałszywe. Czas w poruszającej się rakiecie mierzony jest krótszymi okresami wahań wahadła niż w rakiecie spoczywającej.

W drugiej fazie wznoszenia gdy silniki nie działają, na przedmiot o masie m, znajdujący się w rakiecie działa, oprócz ciężaru $P = mg$, przeciwnie skierowana siła bezwładności $B = -mg$. Siły działające na wahadło znoszą się i zegar wahadłowy przestaje działać.
W ostatniej fazie lotu, gdy rakieta spada z maksymalnej wysokości H, jej ruch, aż do momentu twardego lądowania, odbywa się z przyspieszeniem $a = g$. Podobnie, jak w drugiej fazie lotu, zegar wahadłowy nie działa. Na tej podstawie dochodzimy do wniosku, że czas t_1, który wskazywał zegar w momencie lądowania, jest to czas odmierzony przez wahadło w pierwszej fazie wznoszenia, gdy okres jego wahań wynosił

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}. \tag{8}$$

Rzeczywisty czas trwania pierwszej fazy lotu – t wiąże się ze wskazaniami zegara wahadłowego znajdującego się w rakiecie – t_1: Okresy wahań są odwrotnie proporcjonalne do czasów wskazywanych przez zegary, zatem

$$\frac{t}{t_1} = \frac{T_1}{T}. \tag{9}$$

Wykorzystując zależności otrzymamy:

$$t = t_1\frac{T_1}{T}. \tag{10}$$

Wyrażenie na maksymalną wysokość osiągniętą przez rakietę można więc przekształcić w następujący sposób:

$$H = \frac{a}{2}(1+\frac{a}{g})(t_1\sqrt{\frac{g}{a+g}})^2 = \frac{at_1^{\,2}}{2}. \tag{11}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych podanych w warunkach zadania: $a = 4g$,

$t_1 = 90$s otrzymujemy: $H = 120$ km.