XI OLIMPIADA FIZYCZNA (1961/1962). Stopień III, zadanie teoretyczne – T2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Czesław Ścisłowski, *Fizyka w Szkole* nr 4, 1962;
Piotr Halfter: Olimpiady fizyczne XI i XII. PZWS, Warszawa 1966.

Nazwa zadania: Badanie warunków widoczności przedmiotu umieszczonego w lejku w wodzie.

Działy: Optyka.

Słowa kluczowe: pryzmat, kąt rozwarcia, padania, łamiący, graniczny, współczynnik załamania, całkowite wewnętrzne odbicie, światło, promień, woda, powietrze.

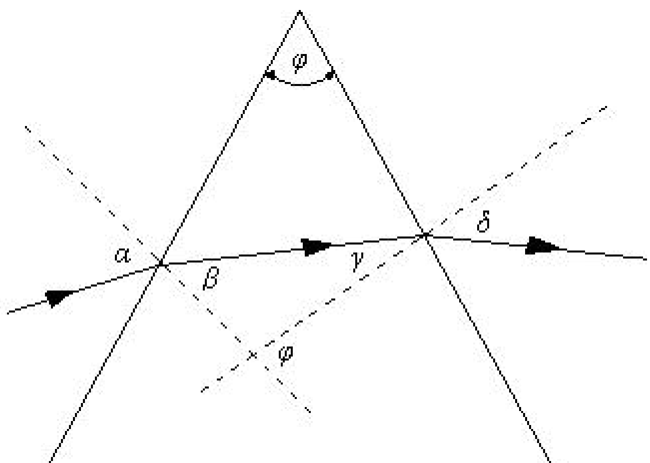
Zadanie teoretyczne – T2, zawody III stopnia, XI OF.

Na dnie naczynia znajduje się niewielki przedmiot, który przykryto cienkościennym lejkiem szklanym w kształcie stożka o kącie rozwarcia 2φ. Lejek szczelnie przylega do dna naczynia. Przedmiot umieszczono w środku podstawy stożka. Następnie naczynie wypełniono przezroczystą cieczą o współczynniku załamania n pokrywając nią całkowicie część stożkową lejka (rys. 2). Jakie warunki muszą być spełnione, aby dla obserwatora patrzącego znad powierzchni cieczy dany przedmiot był widoczny?

Rozwiązanie

Zanim przystąpimy do rozwiązania zadania wprowadźmy zależność pomiędzy kątem padania α na ścianę pryzmatu a kątem δ określającym kierunek promienia wychodzącego z pryzmatu (po dwukrotnym załamaniu wiązki światła), oraz zależność między kątem łamiącym pryzmatu φ i współczynnikiem załamania światła na granicy środowiska ograniczonego pryzmatem i środowiska otaczającego (np. powietrza.).

Przypuśćmy, że mamy pryzmat szklany w powietrzu. Oznaczmy kąt załamania, promienia przy wejściu do pryzmatu przez β, kąt padania na drugą ścianę, przez którą promień wychodzi z pryzmatu przez γ (rys. 1).



Rys. 1

Wówczas

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,, \tag{1}$$

stąd

$$\sin\alpha = n\cdot\sin\beta\,,$$

ale

$$\beta + \alpha = \varphi\,,$$

więc

$$\beta = \varphi - \alpha\,.$$

Wobec tego z (1)

$$\sin\alpha = n\cdot\sin(\varphi-\gamma) = n\cdot\sin\varphi\cos\gamma - n\cdot\sin\gamma\cos\varphi\,. \tag{2}$$

Ale

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{1}{n}\,,$$

skąd

$$\sin\gamma = \frac{\sin\delta}{n}\,,$$

zaś

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2\delta}{n^2}}\,.$$

Po podstawieniu wartości $\sin\gamma$ i $\cos\gamma$ do (2) otrzymamy potrzebną zależność

$$\sin\alpha = \sin\varphi\sqrt{n^2 - \sin^2\delta} - \sin\delta\cos\varphi \tag{3}$$

Zastanówmy się teraz nad pytaniem postawionym w treści zadania. Wynika z niego, że przedmiot znajdujący się pod lejkiem może nie być widoczny dla obserwatora patrzącego znad powierzchni cieczy. W jakich warunkach tak się dzieje? Jeśli wiązka światła przechodzi ze środowiska silniej załamującego do środowiska słabiej załamującego, to może nastąpić całkowite odbicie. Polega ono na tym, że promień nie wychodzi z pryzmatu, lecz wraca do środowiska ograniczonego ściankami pryzmatu.

Wówczas kąt padania γ na granicę środowisk jest większy od kąta zwanego granicznym (γ_{gr}). Wartość tego kąta otrzymujemy z zależności

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{1}{n}$$

Jeśli $\delta = 90°$, to $\sin\gamma_{gr} = \frac{1}{n}$

Aby promień mógł wyjść z pryzmatu musi być

$$\gamma < \gamma_{gr}.$$

Weźmy nadto pod uwagę zależność

$$\gamma = \varphi - \beta. \tag{4}$$

Wynika z niej, że w grę wchodzi również kąt łamiący pryzmatu φ. Otóż okazuje się, że promień może wyjść z pryzmatu ($\gamma < \gamma_{gr}$), jeśli kąt łamiący pryzmatu jest mniejszy od podwojonej wartości kąta granicznego, czyli

$$\varphi < 2\gamma_{gr}.$$

Istotnie, jeżeli $\varphi \geq 2\gamma_{\mathrm{gr}}$, to z (4) wynika, że

$$\gamma \geq 2\gamma_{\mathrm{gr}} - \beta.$$

W takim razie β powinien być większy od γ_{gr} (inaczej bowiem nie byłby spełniony warunek $\gamma < \gamma_{\mathrm{gr}}$).

Ale β nie może być większa od γ_{gr}; wynika to z zależności

$$\frac{\sin\alpha}{n} = \sin\beta \tag{5}$$

gdy

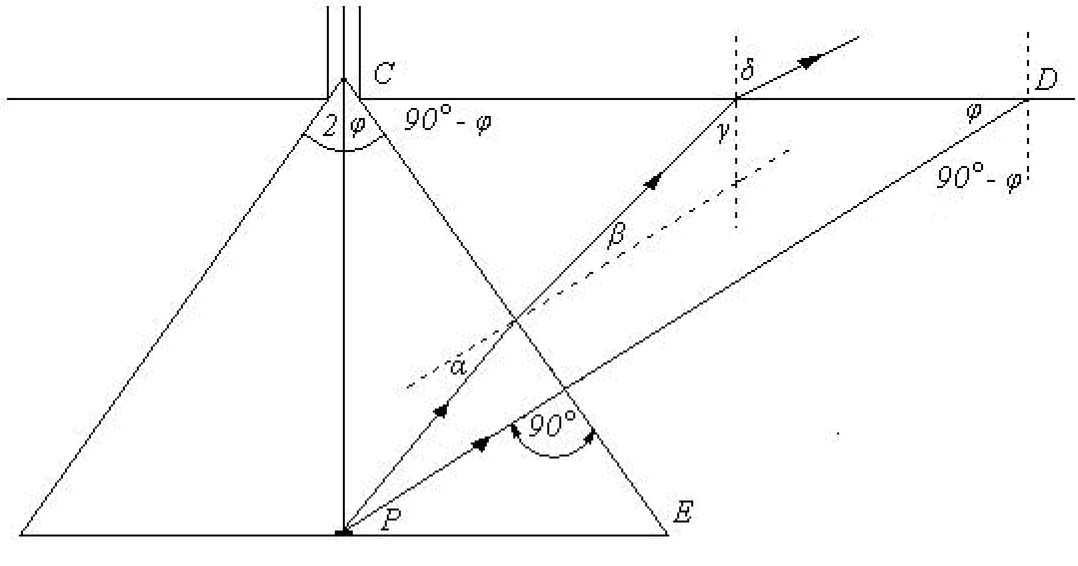
$$\beta > \gamma_{\mathrm{gr}}, \quad \text{to} \quad \sin\beta > \sin\gamma_{\mathrm{gr}} = \frac{1}{n}.$$

Wobec tego równość (5) traci sens, bowiem nie może być

$$\frac{\sin\alpha}{n} > \frac{1}{n}.$$

Tak więc przy $\varphi \geq 2\gamma_{\mathrm{gr}}$ również $\gamma \geq \gamma_{\mathrm{gr}}$ a wtedy dochodzi do skutku całkowite wewnętrzne odbicie.

Przystąpimy teraz do rozwiązania zadania.



Rys. 2

Przyjrzyjmy się rysunkowi 2, który przedstawia przekrój stożka (płaszczyzną pionową przechodzącą przez oś stożka) i otaczającej go cieczy. Odcinek *CD* tego przekroju przedstawia przecięcie granicznej powierzchni powietrza i cieczy. Podobnie odcinek *CE* przedstawia granicę między cieczą a powietrzem. (Lejek ma ściany cienkie. Nie bierzemy przeto pod uwagę znikomego przesunięcia wiązki światła przy przejściu przez szkło).

Figurę *ECD* możemy traktować jako przekrój pryzmatu (utworzonego przez ciecz), którego ściankami są *CD* i *CE*. Kąt łamiący tego pryzmatu jest, jak to widać z rysunku, równy $90° - \varphi$, gdzie φ jest połową kąta rozwarcia stożka.

Skorzystajmy teraz z zależności (3) podstawiając do niej zamiast φ kąt $90° - \varphi$.

$$\sin\alpha = \cos\varphi\sqrt{n^2 - \sin^2\delta} - \sin\delta\sin\varphi \tag{6}$$

Jeśli promień wysyłany przez P pada prostopadle na granicę środowiska (powietrze – woda), tj. $\alpha = 0°$, to przechodzi do drugiego środowiska bez załamania (rys. 2).

Podstawiając tę wartość do (6) otrzymamy

$$0 = \cos\varphi\sqrt{n^2 - \sin^2\delta_1} - \sin\delta_1 \sin\varphi .$$

Skąd

$$\sin\delta_1 \sin\varphi = \cos\varphi\sqrt{n^2 - \sin^2\delta_1} . \qquad (7)$$

Jeśli po przejściu przez ciecz promień pada na drugą granicę środowisk (ciecz – powietrze) pod kątem γ_{gr}, to $\sin\delta_1 = 1$.

Wówczas otrzymamy z (7)

$$\sin\varphi_{gr} = \cos\varphi_{gr}\sqrt{n^2 - 1} .$$

Stąd

$$\mathrm{tg}\varphi_{gr} = \sqrt{n^2 - 1} .$$

Całkowite odbicie, jak z tego wynika, *nie nastąpi* gdy $\sin\delta_1 < 1$.

Wtedy z (7) dzieląc obie strony przez $\sin\delta_1$ mamy

$$\sin\varphi_1 = \cos\varphi_1 \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\delta_1}}{\sin\delta_1} ,$$

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \sqrt{\frac{n^2}{\sin^2\delta_1} - 1} .$$

Ponieważ

$$\sin^2\delta_1 < 1 \quad \text{to} \quad \frac{n^2}{\sin^2\delta_1} > n^2 ,$$

w takim razie

$$\mathrm{tg}\varphi_1 > \sqrt{n^2 - 1} , \qquad (8)$$

czyli

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 > \mathrm{tg}\,\varphi_{gr} .$$

Na przykład dla dwusiarczku węgla $n_1 = 1{,}6166$; $n_2 = 2{,}6134$; $n_1^2 - 1 = 1{,}6134$;

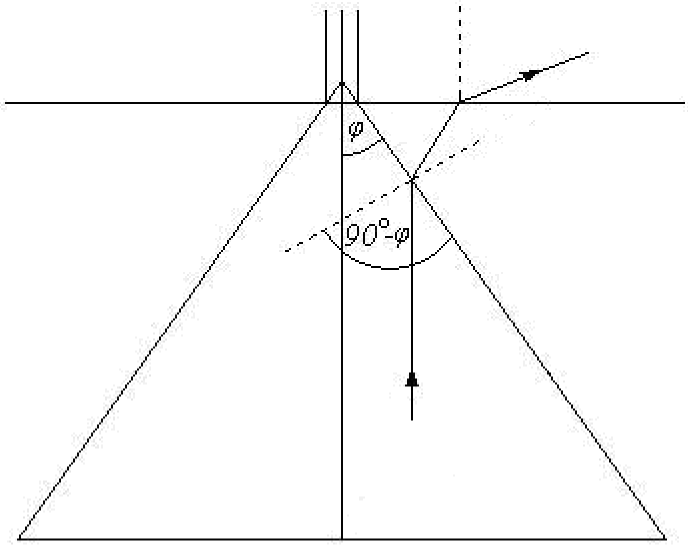
$$\sqrt{1{,}6134} = 1{,}2702 ,$$

$$\varphi_{gr} \approx 51°07'; \qquad \gamma_{gr} \approx 37°40'$$

Dla wody: $n_2 = 1{,}3311$; $n_2^2 = 1{,}7718$; $n_2^2 = 1{,}7718$;

$$\sqrt{0{,}7718} = 0{,}8785 ,$$

$$\varphi_{gr} \approx 41°18'; \qquad \gamma_{gr} \approx 48°40'$$



Rys. 3

Jak widać z rysunku 3 kąt padania α osiągnąłby największą wartość gdyby promień wysyłany przez *P* biegł równolegle do osi stożka (pionowo do góry). Wówczas $\alpha = 90^{\circ} - \varphi$. Podstawiając tę wartość do równania (3) otrzymujemy

$$\sin(90^{0} - \varphi) = \cos\varphi\sqrt{n^2 - \sin^2\delta} - \sin\delta\sin\varphi .$$

Czyli

$$\cos\varphi = \cos\varphi\sqrt{n^2 - \sin^2\delta} - \sin\delta\sin\varphi ,$$

stąd

$$\sin\delta\sin\varphi = \left[\sqrt{n^2 - \sin^2\delta} - 1\right]\cos\varphi .$$

Zatem

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\sin\delta}\left[\sqrt{n^2 - \sin^2\delta} - 1\right]. \qquad (9)$$

Jeśli kąt padania na granicę ciecz – powietrze jest równy granicznemu (γ_{gr}), to $\sin\delta = 1$. Wtedy

$$\mathrm{tg}\varphi'_{gr} = \sqrt{n^2 - 1} - 1$$

Aby nie nastąpiło całkowite wewnętrzne odbicie na tej granicy kąt δ powinien być mniejszy od 90°, czyli $\sin\delta < 1$.

Wtedy z (9) – biorąc pod uwagę (8) – i uwzględniając, że

$$\frac{1}{\sin\delta} > 1 ,$$

zaś

$$\sqrt{n^2 - \sin^2\delta} > \sqrt{n^2 - 1} ,$$

otrzymujemy

$$\mathrm{tg}\varphi' > \mathrm{tg}\varphi'_{gr} ,$$

$$\mathrm{tg}\varphi' \geq \sqrt{n^2 - 1} - 1 .$$

Nierówność ta jest spełniona dla $0^{\circ} \leq \varphi \leq 90^{\circ}$, bowiem $\mathrm{tg}\,\varphi$ jest większy wówczas od zera, zaś prawa strona – zależnie od wartości *n* – jest bądź dodatnia, bądź ujemna.

Na przykład:
Przy przejściu fali o długości λ = 0,687 µm z dwusiarczku węgla do powietrza (n_1 = 1,6166) mamy

$$\sqrt{n_1^2 - 1} - 1 = \sqrt{1{,}6134} - 1 = 1{,}2702 - 1 > 0\,.$$

Przy przejściu tej samej fali z wody do powietrza (n_2 = 1,3311) mamy

$$\sqrt{n_2^2 - 1} - 1 = \sqrt{0{,}7718} - 1 = 0{,}8785 - 1 < 0\,.$$

Promienie biegnące od przedmiotu P w kierunku bocznej powierzchni stożka – po załamaniu na granicypowietrze – ciecz – docierają do granicy ciecz – powietrze, tworzą kąty padania na granicy CE zawarte

$$0^\circ \le \alpha \le 90^\circ - \varphi$$

gdzie φ jest połową kąta rozwarcia stożka.

Kąty padania tych promieni na granicę CD (ciecz – powietrze) są mniejsze od kąta granicznego γ_{gr} jeżeli φ spelnia warunek

$$\mathrm{tg}\varphi_{\mathrm{gr}} > \sqrt{n^2 - 1}\,,$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania cieczy. Wówczas przedmiot umieszczony pod lejkiem będzie widoczny dla obserwatora patrzącego znad powierzchni cieczy.