

XLI OLIMPIADA FIZYCZNA (1991/1992). Stopień II, zadanie teoretyczne – T2.

Źródło:	Komitet Główny Olimpiady Fizycznej; Włodzimierz Ungier; Krzysztof Karpierz: Fizyka w szkole nr 1, 1993.
Nazwa zadania:	Wpływ naelektryzowania powłoki balonu na jego rozmiary.
Działy:	Termodynamika, elektrostatyka
Słowa kluczowe:	ciśnienie, ładunek, energia potencjalna, prawa gazowe, zasada zachowania energii, praca sił elektrycznych, przenikalność dielektryczna, gaz doskonały.

Zadanie teoretyczne – T2, zawody teoretyczne II stopnia, XLI OF.

Wewnątrz zamkniętego balonu znajduje się gaz pod ciśnieniem $p = (4/3)p_0$, gdzie p_0 jest ciśnieniem gazu na zewnątrz balonu. Elastyczna, przewodząca powłoką tego balonu pod wpływem sił działających na jej powierzchnię przyjmuje kształt kuli. Jakim ładunkiem należy naelektryzować powłokę, aby promień balonu zwiększył się dwukrotnie?

W interesującym nas zakresie rozmiarów balonu spełniony jest związek $rp^2 = A = const.$, gdzie r jest promieniem balonu, a Δp wartością wypadkowej siły działającej na jednostkę pola powierzchni jego powłoki.

Dane: p_0 , A , przenikalność dielektryczna gazu jest równa przenikalności dielektrycznej próżni ϵ_0 .

Uwaga! Przyjmij, że w czasie powolnego elektryzowania powłoki gaz zachowuje się jak doskonały oraz że temperatury gazu wewnątrz i na zewnątrz balonu są równe i stałe.

Rozwiązanie

Określimy najpierw związek między całkowitym ładunkiem Q umieszczonym na przewodzącej powłoce balonu, a siłą δp , jaka działa na jednostkowy element powierzchni tej powłoki. Na powierzchni kuli przewodzącej o promieniu r rozkład ładunku jest jednorodny, a energia potencjalna takiego rozkładu ładunków wynosi

$$U = Q^2/8\pi\epsilon_0 r. \quad (1)$$

Przyrost energii potencjalnej związany z bardzo małą zmianą Δr promienia r jest równy:

$$\Delta U = (dU/dr)/\Delta r = -(Q^2/8\epsilon_0 r^2)\Delta r. \quad (2)$$

natomiast praca sił elektrycznych potrzebna do zwiększenia promienia r o Δr wynosi

$$W = 4\pi r^2 \delta p \Delta r. \quad (3)$$

Z zasady zachowania energii mamy $\Delta U + W = 0$, zatem związek między Q , r i Δp jest następujący¹:

$$Q^2 = 32\pi^2\epsilon_0 r^4 \delta p. \quad (4)$$

Oznaczmy przez r_1 i r_2 ($2r_1 = r_2$) promienie balonu odpowiednio przed i po naelektryzowaniu jego powłoki. Ciśnienie końcowe gazu wewnątrz balonu p' obliczamy korzystając z równania $pV = const$ ($pr_1^3 = p'r_2^3$) skąd mamy:

¹ W.Gorzowski, 25 lat Olimpiad Fizycznych (zadanie 19, str.275)

$$p' = \frac{1}{8}p. \quad (5)$$

Uwzględniając równość $p = (4/3)/p_0$ otrzymujemy równania

$$r_1 = A/(p - p_0)^2 = 9A/p_0^2 \quad (6)$$

$$r_2 = A/(p' + \delta p - p_0)^2 = A/(\delta p - \frac{5}{6}p_0)^2. \quad (7)$$

Korzystając z warunku $2r_1 = r_2$, oraz z powyższych wzorów (6) i (7) otrzymujemy równanie:

$$\pm \sqrt{2} (\delta p - \frac{5}{6}p_0) = \frac{1}{3}p_0 \quad (8)$$

(równanie ze znakiem „-” przed pierwiastkiem odrzucamy gdyż powłoka balonu jest napięta wtedy, gdy spełniona jest nierówność $\delta p - \frac{5}{6}p_0 > 0$ z którego wynika

$$\delta p = \frac{5 + \sqrt{2}}{6} p_0. \quad (9)$$

Podstawiając do wzoru (4) otrzymaną wartość (9) oraz, $r = r_2 = 2r_1$ z r_1 obliczonym według wzoru (6) otrzymujemy ostatecznie

$$Q^2 = 2^8 \cdot 3^7 \cdot (5 + \sqrt{2}) \pi^2 \varepsilon_0 A^4 / p_0^7 \quad (10)$$

Proponowana punktacja

- | | |
|---|-----------|
| 1. Związek ciśnienia δp z ładunkiem Q – wzór (4) | max 4 pkt |
| 2. Wyznaczenie δp z równania materiałowego i prawa gazowego (9) | max 3 pkt |
| 3. Wzór końcowy – (10) | max 3 pkt |