Zadanie „bloczek”

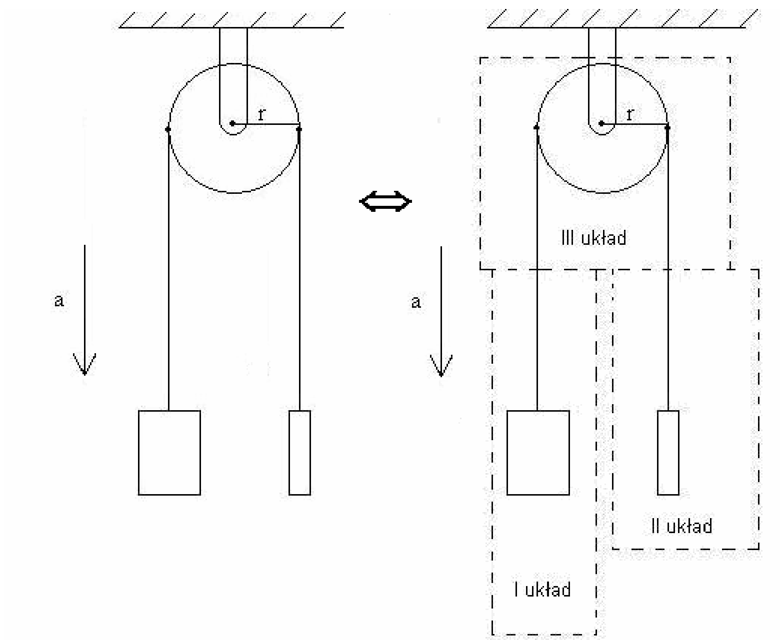
Przez zamocowany bloczek o masie *m* przerzucono nierozciągliwą nitkę na której zawieszono dwa obciążniki o masach odpowiednio m_1 i m_2. Oblicz przyspieszenie z jakim będą poruszać się obciążniki. Masę nitki i opory zaniedbać. Przyjmij, że moment bezwładności bloczka o promieniu *r* jest równy $mr^2/2$, masę nitki pomiń.

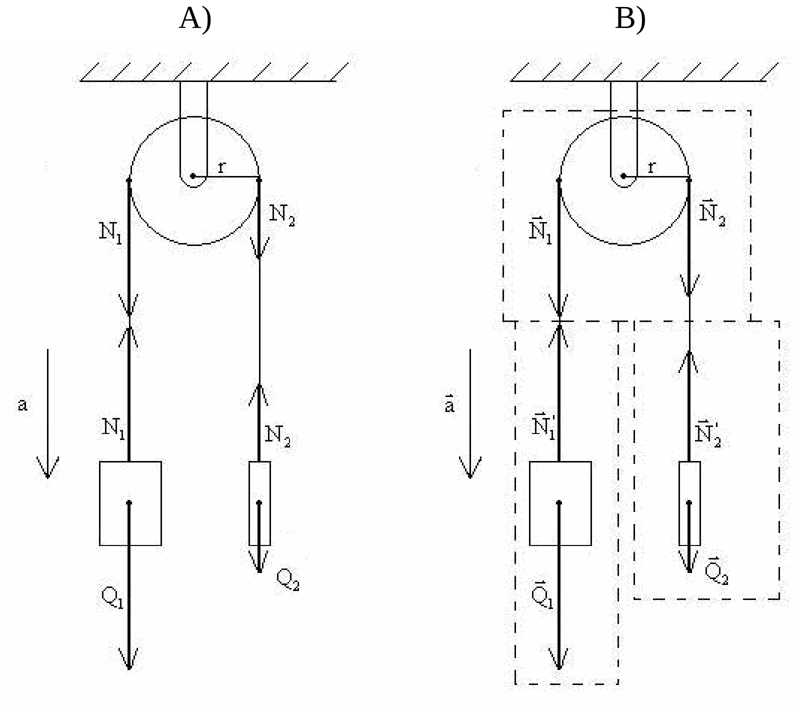
Uwaga: Zadanie to jest typowym, występującym w wielu wariantach (zobacz przypadki szczególne – str. 8). Dla przypadku, gdy jednego z obciążników nie ma, wystąpiło na egzaminie maturalnym w maju 2005 r.

Rozwiązanie

I sposób rozwiązania - podział na podukłady.

Rys.1 - wyjściowy Rys. 2 - podział na układy





Rys.3 - zaznaczenie sił

gdzie: $|\vec{N}| = |\vec{N}'|$

Korzystamy z II zasady dynamiki Newtona:

$$F_{wyp} = ma\,.$$

Dla podukładu I (lewego obciążnika) mamy:

$$Q_1 - N_1 = m_1 a\,. \tag{1}$$

Dla podukładu II (prawego obciążnika) mamy:

$$N_2 - Q_2 = m_2 a\,. \tag{2}$$

Dla podukładu III - z samym bloczkiem, mamy:

$$M_{wyp} = I\varepsilon\,. \tag{3}$$

Zatem

$$M_1 - M_2 = I\varepsilon\,, \tag{4}$$

Przy założeniu, że nić jest nierozciągliwa i nie ma poślizgów na bloczku

$$rN_1 - rN_2 = I\varepsilon \tag{5}$$

Rozwiązując powyższy układ 3 niezależnych równań (3 podukłady) i uwzględniając, że zależność kinematyczna między przyspieszeniem kątowym a liniowym bloczka wynosi

$$a = r\varepsilon ,$$

otrzymujemy

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g \qquad (6)$$

Komentarz:

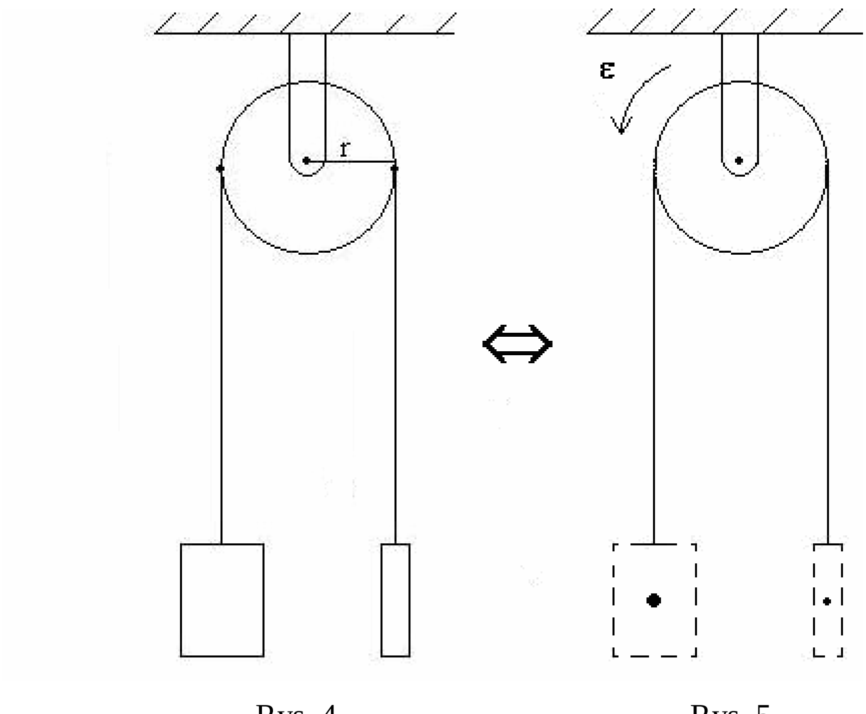
Aby utrwalić kolejność wielkości fizycznych powinno się stosować najpierw wielkości skalarne a później wektorowe, tak jak zostało to przedstawione w równaniu 3a.

W rozwiązaniu zaproponowanym przez Centralną Komisję Egzaminacyjną w pierwszym równaniu dla ruchu obrotowego kołowrotu pojawiła się odwrotna kolejność zapisu, która jest nie zgodna z ustaleniem wielkości fizycznych. Zapis równania dla ruchu obrotowego powinien mieć następującą postać:

$rN = I\varepsilon$, zamiast $Nr = \varepsilon I$.

II sposób rozwiązania (całościowy):

Wyjściowy układ (Rys. 4) jest równoważny kolejnym (Rys. 5, 6, 7), w którym nie uwzględniamy sił wewnętrznych.



Rys. 4. Rys. 5.

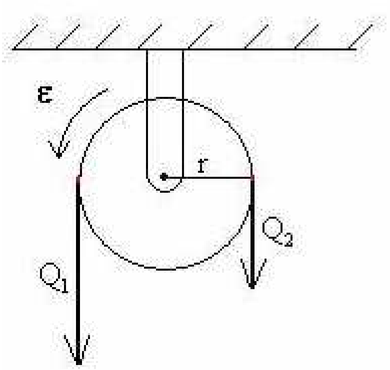
Obciążniki działają na bloczek w miejscu styku nitki z bloczkiem. Zatem układ 2 obciążników z nitkami możemy zastąpić :

samymi siłami pochodzącymi od tych obciążników działających na bloczek w miejscu ich styku – rys. 6

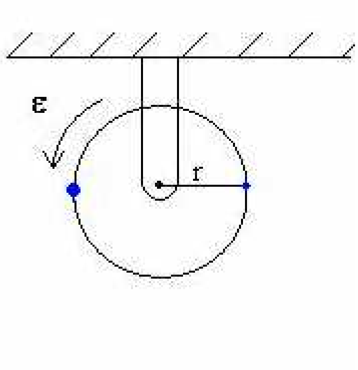
i

punktami materialnymi znajdującymi się cały czas w punkcie styku – rys.7, wpływa to na moment bezwładności całego układu, który jest równy sumie momentu bezwładności bloczka i momentom bezwładności dwóch punktów materialnych znajdujących się w odległości r od osi obrotu, czyli:

$$I_{cał} = m_1 r^2 + m_2 r^2 + \frac{1}{2} m r^2 .$$



Rys.6.



Rys.7.

(Ciała materialne - obciążniki zastąpiliśmy punktami materialnymi jak na Rys. 7. Ramię siły ciężaru punktu materialnego nie ulega zmianie, więc można dowolnie wzdłuż nitki przesuwać punkty materialne.)

Korzystamy z II zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

$$\varepsilon = \frac{M_{\mathrm{wyp}}}{I_{\mathrm{c}}}$$

gdzie: $M_{\mathrm{wyp}} = rQ_1 - rQ_2$, $I_{\mathrm{c}} = I + m_1 r^2 + m_2 r^2$,

$I = mr^2/2$ - moment bezwładności bloczka.

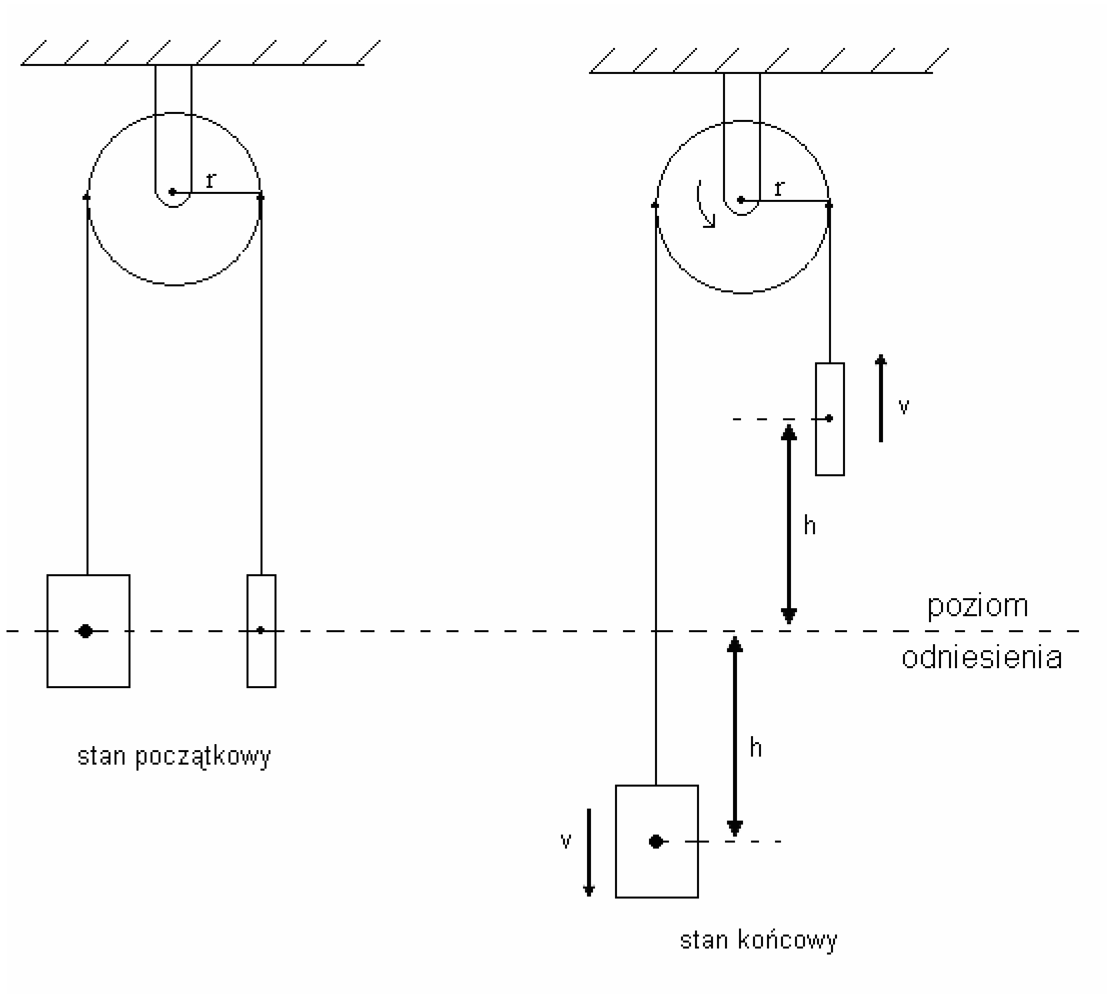
Podstawiając, mamy:

$$\varepsilon = \frac{rQ_1 - rQ_2}{m_1 r^2 + m_2 r^2 + \frac{1}{2} m r^2} .$$

Stąd, mnożąc przez r otrzymujemy a.

III sposób rozwiązania (z zasady zachowania energii):

W tym przypadku rysujemy układ w stanie początkowym – rys. lewy (poniżej) i w stanie końcowym – rys. prawy (poniżej).



Rys. 8. Rys.9.

Energia mechaniczna jest równa 0.
Dla stanu początkowego:

$$E^{(pocz)} = 0\,.$$

Dla stanu końcowego:

$$E^{(końo)} = E_{k_1} + E_{p_1} + E_{k_2} + E_{k_2} + E_{kbl}$$

$$= \frac{m_1 \upsilon^2}{2} - m_1 gh + \frac{m_2 \upsilon^2}{2} - m_2 gh + \frac{1}{2} I\omega^2\,.$$

Ponieważ

$$E^{(pocz)} = E^{(koń)},$$

więc

$$0 = \frac{m_1 v^2}{2} - m_1 gh + \frac{m_2 v^2}{2} - m_2 gh + \frac{1}{2} I\omega^2 .$$

Zatem

$$\left(m_1 - m_2\right)gh = \frac{1}{2} v^2 \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m \right).$$

Stąd

$$v^2 = 2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} gh .$$

Z kinematyki wiadomo, że w ruchu jednostajnie zmiennym (dla $v_0 = 0$):

$$v^2 = 2a\Delta x$$

Mając prędkość w stanie końcowym możemy obliczyć przyspieszenie w trakcie ruchu, które jest stałe, ponieważ siły działające w tym układzie nie ulegają zmianie (F = const), więc porównując dwa ostatnie równania, otrzymujemy:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g .$$

Sposób przejścia od zadania złożonego do podstawowego

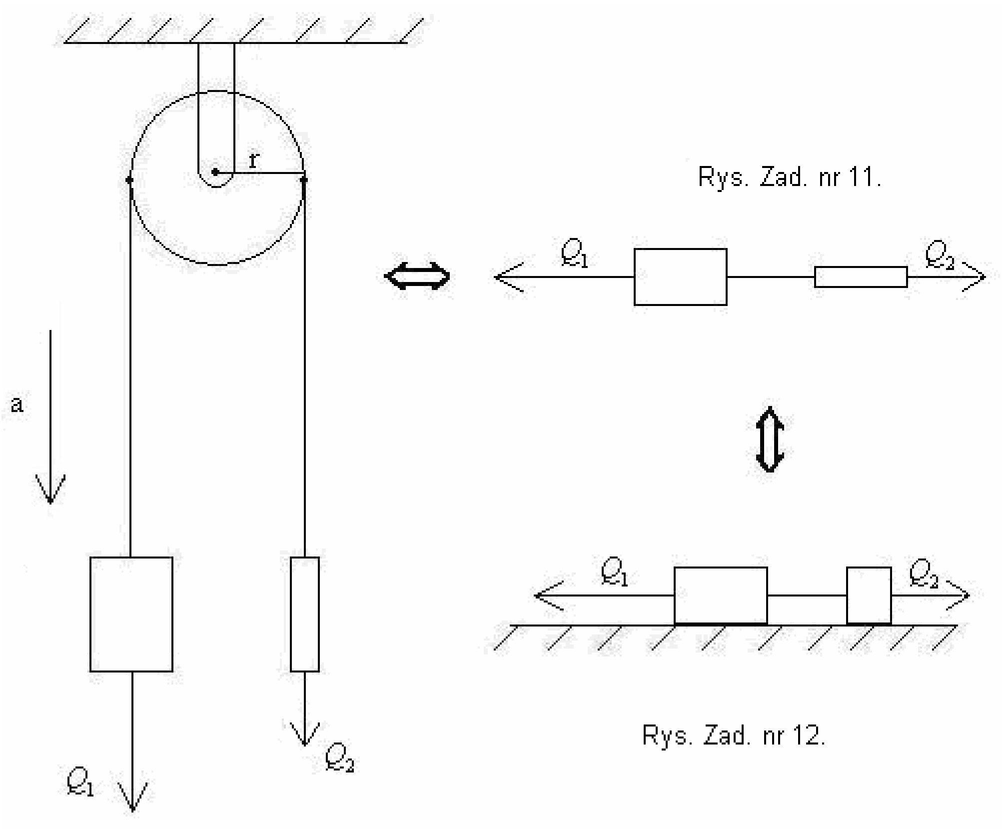
Duży problem dla ucznia w rozwiązywaniu zadań stanowi jego brak umiejętności matematycznych i fizycznych. Uczeń powinien umieć powiązać trudne zadanie z zadaniem wyjściowym, podstawowym.

Przykładem takiego typu zadań jest zadanie z bloczkiem, które pojawiło się na egzaminie maturalnym z fizyki w roku szkolnym 2004/2005, rozwiązane wyżej. Jest to zadanie najbardziej reprezentatywne, z działu mechaniki.

Zadania maturalne są zadaniami złożonymi, które wymagają większych umiejętności związanych z fazami rozwiązywania zadań. Uczeń musi nauczyć się prostych zadań po to by móc rozwiązać zadanie bardziej złożone.

W umiejętny sposób można dojść od zadania złożonego do prostego. Poniżej zamieszczam sposób takiego rozwiązania na przykładzie zadania z bloczkiem, przy założeniu, że $m_b = 0$.

Przechodzimy od układu bloczka - Rys. 1 i 10 do układu podstawowego – rys. od 11 do 14.

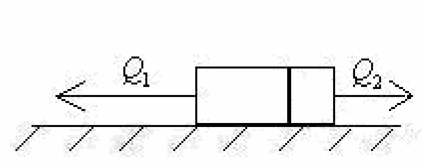


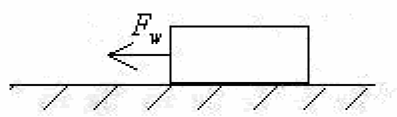
Rys. 10

Rys. Zad. nr 12. to typowy, standardowy układ z „wyprostowaniem”. Nitka powoduje zmianę zwrotu działającej siły.

W kolejnym kroku pomijamy nitkę, która jest nieważka i nierozciągliwa. Następnie zastępujemy dwa ciała jednym ciałem o masie:

$$m_c = m_1 + m_2 .$$

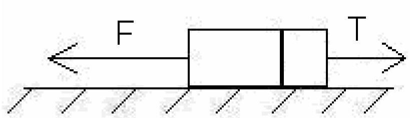


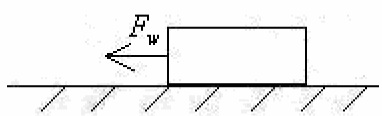


Rys.13. Rys.14.

$$F_w = Q_1 - Q_2$$

Typowym przypadkiem dla Rys. Zad. nr 13 jest ruch ciała z tarciem:





Rys.15. Rys.16.

Dyskusja rozwiązania zadania

1. Zbadanie szczególnych przypadków:

a) moment bezwładności i masa bloczka są równe zero ($I = 0$ i $m = 0$), oraz gdy masy obciążników m_1, m_2 są dowolne. Z rozwiązania ogólnego (6), dla $m = 0$ mamy :

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

W przypadku granicznym gdy $m_2 = 0$, wówczas mamy spadek swobodny: $a = g$, który jest zgodny z naszym doświadczeniem;

b) $m_1 = m_2$ to $a = 0$, przy czym masa bloczka jest dowolna i układ jest w równowadze-przypadek statyczny ($F_w = 0$);

c) $m_2 = 0$, wówczas $a = \dfrac{m_1}{m_1 + \frac{1}{2}m}$, przypadek ten jest zadaniem maturalnym.

2. Sprawdzenie symetrii wyniku:

Jeżeli ciała zamienimy miejscami, tzn. $1 \to 2$ a $2 \to 1$ to $a \to -a$, w naszym przypadku, dla rozwiązania (6), wykazujemy następująco:

$$a' = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{1}{2}m} g = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g = -a$$

3. Parametry decydujące o wielkości poszukiwanej:

– decydują dwa parametry – stosunki mas $\dfrac{m_2}{m_1}$ i $\dfrac{m}{m_1}$:

$$a = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{m}{m_1}} g \qquad ;$$

– przyspieszenie nie zależy od promienia r.

4. Eksperyment:

a) Można wykonać w szkolnej pracowni, na lekcji, podczas zajęć. Przykładowy zestaw doświadczalny widoczny jest na zdjęciach 1 i 2.

Zdjęcie nr 1.

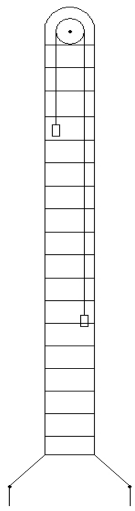
Zdjęcie nr 2.

Zdjęcie nr 1- stan początkowy,
Zdjęcie nr 2- stan końcowy.

b) Zamiast bloczka można stosować spadkownicę Atwooda. Jest to przyrząd – pomoc dydaktyczna w wielu szkołach. Przykładem tego może być zadanie ze spadkownicą Atwooda, które występuje w wielu zbiorach zadań i jest zaliczane do zadań wciąż aktualnych.

Zadanie ze spadkownicą Atwooda.

Spadający ciężar przebył na spadkownicy Atwooda drogę $s = 150$ cm w czasie $t = 5$ s. Oblicz przyspieszenie oraz prędkość końcową jego ruchu.



Rys. 17.

Źródło: Zbiór zadań z fizyki, Waldemar Zillinger

Nazwa zadania: Spadkownica Atwooda

Rozwiązanie:

Przyspieszenie: $a = \frac{2s}{t^2} = 12 \ \frac{cm}{s^2}$;

Prędkość końcowa: $\upsilon_{konc} = \frac{2s}{t} = 60 \ \frac{cm}{s}$.