

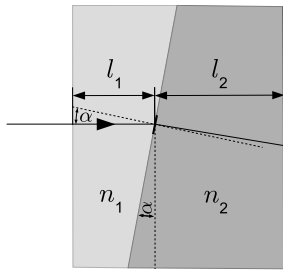
# LXX OLIMPIADA FIZYCZNA

## ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 10.01.2021

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

### Zadanie 1



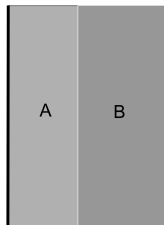
Siatka dyfrakcyjna o stałej siatki  $d$  znajduje się na granicy dwóch ośrodków (1) i (2) o współczynnikach załamania światła odpowiednio  $n_1$  i  $n_2$ . Na siatkę pada od strony ośrodka (1) wiązka światła lasera o długości fali w próżni równej  $\lambda$ , przy czym  $\lambda \ll d$ . Kąt padania wynosi  $\alpha$ . W odległości  $l_2$  ( $l_2 \gg d$ ) od siatki znajduje się ekran prostopadły do początkowego kierunku biegu wiązki – patrz rysunek. Brzeg ośrodka (1) znajduje się w odległości  $l_1$  ( $l_1 \gg d$ ) od siatki dyfrakcyjnej.

Uwzględniając, że kąt  $\alpha$  jest na tyle mały, że można przyjąć

$\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ , oraz pomijając odbicie światła na granicy ośrodków, wyznacz odległość między maksimami  $m$  – tego oraz zerowego prążka interferencyjnego. Rozważ tylko  $m = \pm 1, \pm 2$ .

Podaj wyniki liczbowe dla  $l_1 = 1$  m,  $l_2 = 2$  m,  $\lambda = 405$  nm,  $d = 5000$  nm,  $n_1 = 1,33$ ,  $n_2 = 1,50$ ,  $m = \pm 1$ .

### Zadanie 2



Między dwiema równoległymi, metalowymi płytkami A i B o powierzchni  $S$  każda znajdują się równoległe do nich warstwy materiałów: A, o module Younga  $Y_A$  oraz B, o module Younga  $Y_B$ . Opory właściwe tych warstw wynoszą odpowiednio  $\rho_A$  oraz  $\rho_B$ . Warstwy są przyklejone do siebie oraz do odpowiedniej płytki (jakikolwiek wpływ własności kleju można pominąć), a ich przenikalność elektryczna jest równa (w przybliżeniu) przenikalności elektrycznej próżni  $\epsilon_0$  (materiały mają strukturę porowatą, ale wielkość porów jest znacznie mniejsza niż grubość danej warstwy, więc każdą z nich można traktować jako jednorodną). Grubości warstw są znacznie mniejsze niż ich poprzeczne rozmiary. Jedna z płytek jest umocowana, natomiast druga płytka może się przesuwać i nie działają na nią żadne siły zewnętrzne. Początkowo płytki były nienaładowane, nie płynął między nimi prąd, a grubości odpowiednich warstw wynosiły  $d_{A0}$  oraz  $d_{B0}$ .

Płytki podłączono do stałego napięcia  $U$ . Przyjmując, że opór elektryczny warstw nie zmienia się w wyniku ściśnięcia lub rozciągnięcia, wyznacz zmianę odległości między

płytkami (w porównaniu do sytuacji początkowej) po długim czasie.

Podaj wynik liczbowy dla  $\rho_A = 1,0 \cdot 10^{10}$   $\Omega$ m,  $\rho_B = 2,0 \cdot 10^{10}$   $\Omega$ m,  $Y_A = 1,0 \cdot 10^6$  Pa,  $Y_B = 2,0 \cdot 10^6$  Pa,  $d_{A0} = 1,0 \cdot 10^{-4}$  m,  $d_{B0} = 2,0 \cdot 10^{-4}$  m,  $S = 1,0 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>,  $U = 10000$  V.

Uwaga:

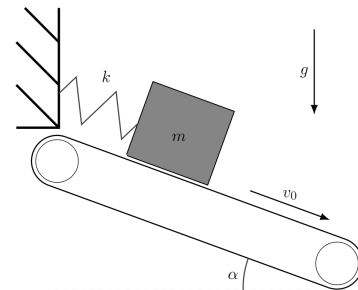
Moduł Younga jest zdefiniowany następująco

$$Y = \frac{F}{S} \frac{d}{\Delta d},$$

gdzie  $F$  jest siłą rozciągającą ( $F > 0$ ) lub ściskającą ( $F < 0$ ) warstwę,  $S$  – jej początkową powierzchnią,  $d$  – początkową grubością warstwy,  $\Delta d$  – zmianą tej grubości wywołaną ściskaniem lub rozciąganiem.

Przenikalność elektryczna próżni jest równa  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$   $\frac{F}{m}$ .

### Zadanie 3



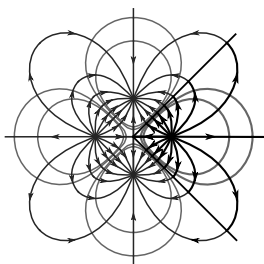
Klocek o masie  $m$  jest przymocowany do nieruchomej ściany sprężyną o stałej sprężystości  $k$  i opiera się na pasie transmisyjnym tworzącym z poziomem kąt  $\alpha$ . Sprężyna jest równoległa do pasa. Współczynnik tarcia klocka o pas wynosi  $\mu_k$  dla tarcia kinetycznego oraz  $\mu_s$  dla tarcia statycznego ( $\mu_k < \mu_s$ ). Początkowo pas był nieruchomy, ale swobodny (tzn. mógł się przesuwać bez oporów), a klocek spoczywał względem ściany.

W chwili  $t = 0$  napęd pasa został włączony i od tego momentu pas przesuwa się ze stałą prędkością  $v_0$  ( $v_0 > 0$ , zwrot jak na rysunku). Po pewnym czasie ruch klocka ustali się w formie okresowych drgań.

Opisz ruch klocka podczas tych drgań. Wyznacz skrajne wychylenia klocka względem położenia początkowego.

Podaj wyniki liczbowe tych skrajnych wychyleń, gdy  $m = 1$  kg,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $k = 10$  N/m,  $\mu_k = 0,4$ ,  $\mu_s = 0,5$ ,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> w dwóch przypadkach prędkości pasa transmisyjnego:

- $v_0 = 1,5$  m/s,
- $v_0 = 0,5$  m/s.



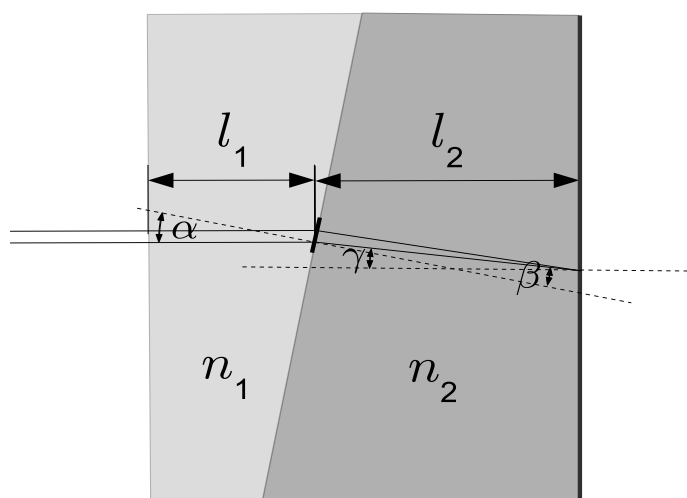
# LXX OLIMPIADA FIZYCZNA

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW II STOPNIA

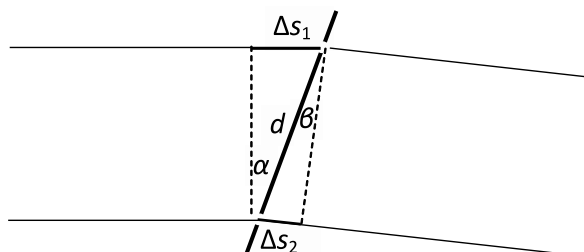
### CZĘŚĆ TEORETYCZNA

#### Rozwiązanie zadania 1

Aby rozwiązać to zadanie, należy wyznaczyć różnicę faz dwóch fal dochodzących do tego samego punktu na ekranie a przechodzących przez sąsiednie szczeliny siatki dyfrakcyjnej. Drogi tych fal przedstawiono schematycznie na rysunku.



W ośrodku 1 fala docierająca do górnej szczeliny na rysunku musi pokonać drogę o  $\Delta s_1 = d \sin \alpha$  większą od fali docierającej do dolnej szczeliny, patrz poniższy rysunek



Stąd wynika, że różnica faz między tymi falami w ośrodku (1) jest równa

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \Delta s_1 \approx \frac{2\pi d \alpha}{\lambda_1}$$

gdzie  $\lambda_1$  jest długością fali w ośrodku (1), czyli  $\lambda_1 = \lambda/n_1$ . Zatem wzór na  $\Delta\varphi_1$  przybiera postać

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi n_1 d \sin \alpha}{\lambda}. \quad (1)$$

W podobny sposób obliczamy różnicę faz wynikającą z tego, że dolna fala ma dłuższą niż górna drogę do tego samego punktu na ekranie. Zauważmy, że na odległościach rzędu wielokrotności  $d$  odcinki odpowiadające tym dwóm drogom można traktować jako równoległe. Oznaczmy przez  $\beta$  kąt jaki tworzą te odcinki z normalną do granicy ośrodków (1) i (2) – patrz rysunek. Różnica dróg jakie przebywają fale w ośrodku (2) po przejściu z ośrodka (1) do ośrodka (2) wynosi

$$\Delta s_2 = -d \sin \beta.$$

Minus odpowiada temu, że tutaj droga odpowiadająca dolnej fali jest dłuższa, a poprzednio była krótsza.

Odpowiadająca tej różnicy dróg różnica faz wynosi

$$\Delta\varphi_2 = \frac{2\pi n_2 d \sin \beta}{\lambda}, \quad (2)$$

gdzie uwzględniliśmy, że w ośrodku (2) długość fali jest równa  $\lambda/n_2$

Zatem całkowita różnica faz między rozważanymi falami wynosi

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_1 \sin \alpha - n_2 \sin \beta). \quad (3)$$

Konstruktywna interferencja zachodzi gdy różnica faz jest wielokrotnością  $2\pi$ , czyli gdy

$$\frac{2\pi d}{\lambda} (n_1 \sin \alpha - n_2 \sin \beta) = 2\pi m. \quad (4)$$

Z tego warunku możemy wyznaczyć  $\sin \beta$

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha - m \frac{\lambda}{n_2 d}. \quad (5)$$

Ponieważ  $\alpha$  jest małe,  $\lambda/d$  jest małe,  $n_1, n_2$  dla wszystkich znanych materiałów jest rzędu jedności, a  $m$  może być równe  $\pm 1, \pm 2$ , prawa strona powyższej równości jest mała, a zatem  $\sin \beta$  jest małe i można przyjąć  $\sin \beta \approx \beta$ . Zatem powyższe równanie można zapisać jako

$$\beta = \frac{n_1}{n_2} \alpha - m \frac{\lambda}{n_2 d}. \quad (6)$$

Z rozważań geometrycznych kąt padania fali na ekran  $\gamma$  jest równy

$$\gamma = \alpha - \beta. \quad (7)$$

Przesunięcie pionowe punktu na ekranie (w porównaniu z przedłużeniem promienia biegnącego w ośrodku (1); przyjmujemy, że dodatnie przesunięcie jest w dół rysunku) jest dane wzorem

$$y = l_2 \operatorname{tg} \gamma. \quad (8)$$

Ponieważ z poprzednich wzorów wynika, że  $\gamma$  jest małe, możemy przyjąć  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$  i rozważane przesunięcie będzie równe

$$y_m = l_2 \left( \alpha - \frac{n_1}{n_2} \alpha + m \frac{\lambda}{n_2 d} \right). \quad (9)$$

Stąd szukana odległość między maksimum  $m$  – tego prążka a maksimum prążka zerowego  $\Delta y_m = y_m - y_0$  wynosi

$$\Delta y_m = m \frac{\lambda}{n_2 d} l_2. \quad (10)$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy

$$\Delta y_{\pm 1} = \pm 0,11 \text{ m}. \quad (11)$$

## Rozwiązanie zadania 2

Ponieważ materiały są połączone szeregowo, to między płytkami płytami płynie prąd o natężeniu

$$I = \frac{US}{\rho_A d_{A0} + \rho_B d_{B0}}. \quad (12)$$

Spadki napięcia w warstwach wynoszą odpowiednio  $U_A = I \rho_A d_{A0} / S$  oraz  $U_B = I \rho_B d_{B0} / S$ . Zatem natężenie pola elektrycznego w obszarze odpowiednich materiałów wynoszą

$$E_A = \frac{U_A}{d_{A0}} = \frac{I}{S} \rho_A, \quad (13)$$

$$E_B = \frac{U_B}{d_{B0}} = \frac{I}{S} \rho_B. \quad (14)$$

Z prawa Gaussa wynika, że ładunki na płytkach wynoszą odpowiednio

$$Q_A = \varepsilon_0 E_A S, \quad (15)$$

$$Q_B = -\varepsilon_0 E_B S. \quad (16)$$

Ponieważ na zewnątrz kondensatora natężenie pola elektrycznego jest równe 0, zewnętrzne pole elektryczne, w którym znajduje się dana płytka ma natężenie odpowiednio  $E_A/2$  lub  $E_B/2$ . Zatem siły elektrostatyczne, jakie działają na każdą z płytek wynoszą odpowiednio

$$F_A = Q_A \frac{E_A}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{I}{S} \rho_A \right)^2 S, \quad (17)$$

$$F_B = Q_B \frac{E_B}{2} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{I}{S} \rho_B \right)^2 S. \quad (18)$$

Zauważmy, że w ogólnym przypadku  $F_A + F_B \neq 0$ . Jest to spowodowane tym, że pomiędzy materiałami gromadzi się ładunek

$$Q_{AB} = \varepsilon_0 (E_B - E_A) S. \quad (19)$$

Ten ładunek znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym  $E_{AB} = (E_A + E_B)/2$ , a zatem działa na niego siła

$$F_{AB} = Q_{AB} E_{AB} = -F_A - F_B. \quad (20)$$

To oznacza, że siła elektryczna rozciągająca warstwę A wynosi  $-F_A$  (będzie ona ujemna, czyli tak naprawdę będzie to siła ściskająca), a siła elektryczna rozciągająca warstwę B wynosi po prostu

$F_B$  ( $F_B$  jest ujemne, zatem warstwa B też będzie ściskana). Te siły muszą być równoważone przez odpowiednie siły sprężystości, a zatem

$$F_A = -Y_A \frac{\Delta d_A}{d_{A0}} S, \quad (21)$$

$$F_B = Y_B \frac{\Delta d_B}{d_{B0}} S. \quad (22)$$

Czyli muszą być spełnione równości

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{I}{S} \rho_A \right)^2 S = -Y_A \frac{\Delta d_A}{d_{A0}} S, \quad (23)$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{I}{S} \rho_B \right)^2 S = -Y_B \frac{\Delta d_B}{d_{B0}} S. \quad (24)$$

Zatem zmiana odległości między płytkami wynosi

$$\Delta d = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{\rho_A d_{A0} + \rho_B d_{B0}} \right)^2 \left( \frac{\rho_A^2}{Y_A} d_{A0} + \frac{\rho_B^2}{Y_B} d_{B0} \right). \quad (25)$$

Znak minus powyżej oznacza, że odległość między płytkami się zmniejszyła – warstwy uległy ściśnięciu. Dla podanych danych liczbowych otrzymujemy

$$\Delta d = 8,85 \cdot 10^{-7} \text{ m}. \quad (26)$$

Zauważmy, że gdy  $\rho_A = \rho_B$  otrzymamy

$$\Delta d = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{d_{A0} + d_{B0}} \right)^2 \left( \frac{d_{A0}}{Y_A} + \frac{d_{B0}}{Y_B} \right). \quad (27)$$

W powyższym wzorze wielkość

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{d_{A0} + d_{B0}} \right)^2 = f \quad (28)$$

jest po prostu siłą, z jaką przyciągają się okładki kondensatora płaskiego, podzieloną przez powierzchnię tych okładek kondensatora, natomiast wielkości  $-f \frac{d_{A0}}{Y_A}$  oraz  $-f \frac{d_{B0}}{Y_B}$  odpowiadają zmianie grubości każdej z warstw.

### Rozwiązanie zadania 3

Na klocek działają siły: ciężkości  $mg$ , sprężystości sprężynki, tarcia  $T$  oraz prostopadła do pasa siła reakcji pasa.

W kierunku prostopadłym do pasa transmisyjnego siły się równoważą; w kierunku równoległym do niego równanie ruchu ma postać

$$ma = -kx + T, \quad (29)$$

gdzie  $x$  jest odchyleniem od położenia początkowego, natomiast  $a$  jest przyspieszeniem klocka. Zauważmy, że nie występuje tu składowa siły ciężkości wzdłuż pasa transmisyjnego –  $x$  jest tak zdefiniowane, że dla  $x = 0$  ta składowa i siła sprężystości się równoważą.

Siła tarcia jest równa

$$T = \mu_k mg \cos \alpha, \text{ gdy } v < v_0, \quad (30)$$

$$-\mu_s mg \cos \alpha \leq T \leq \mu_s mg \cos \alpha, \text{ gdy } v = v_0, \quad (31)$$

$$T = -\mu_k mg \cos \alpha, \text{ gdy } v > v_0, \quad (32)$$

gdzie  $v$  jest prędkością klocka względem ściany. Skoro początkowo klocek jest w równowadze i nie porusza się, nie oczekujemy żeby zaszedł przypadek  $v > v_0$ .

Po uruchomieniu pasa klocek zaczyna się przesuwać zgodnie z kierunkiem ruchu pasa. Zachodzi  $v < v_0$ , a zatem równanie ruchu przyjmuje postać

$$ma = -kx + \mu_k mg \cos \alpha. \quad (33)$$

Zauważmy, że po podstawieniu  $x = \tilde{x} + \mu_k mg \cos \alpha / k$  otrzymamy w zmiennej  $\tilde{x}$  zwykłe równanie ruchu harmonicznego. Zatem ruch klocka jest ruchem harmonicznym wokół położenia równowagi  $x = x_0$ , gdzie

$$x_0 = \frac{\mu_k mg \cos \alpha}{k}, \quad (34)$$

z częstością

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (35)$$

Ponieważ w chwili początkowej klocek spoczywa i jest wychylony na odległość  $\mu_k mg \cos \alpha / k$  od położenia równowagi, amplituda tych drgań jest równa właśnie  $x_0$ . Po uwzględnieniu warunków początkowych zależność położenia  $x$  od czasu  $t$  jest następująca

$$x = x_0 (1 - \cos \omega t), \quad (36)$$

Teoretyczna maksymalna prędkość w takim ruchu wynosi

$$v_{\max} = x_0 \omega = \sqrt{\frac{m}{k}} \mu_k g \cos \alpha. \quad (37)$$

Można ją uzyskać z równania (36) lub z efektywnej zasady zachowania energii  $mv_{\max}^2/2 = \frac{(\mu_k mg \cos \alpha)^2}{2k}$ ; „efektywnej” dlatego, że ze względu na występowanie tarcia poślizgowego energia mechaniczna nie jest zachowana, ale związana z nią siła jest stała i możemy tę siłę z punktu widzenia klocka traktować jako siłę zachowawczą.

Jeśli  $v_{\max} < v_0$ , to klocek będzie stale ślizgał się po pasie. Ruch będzie w tym przypadku zwykłym ruchem harmonicznym z okresem  $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ; skrajne położenia klocka w tym ruchu są następujące

$$x_{\min} = 0, \quad (38)$$

$$x_{\max} = \frac{2\mu_k mg \cos \alpha}{k}. \quad (39)$$

Jeśli  $v_{\max} \geq v_0$ , to rozwiązanie (36) (oraz równanie ruchu (33)) obowiązuje tylko do chwili, gdy  $v = v_0$ ; oznaczmy odpowiednie położenie jako  $x_1$ . W tym momencie siła tarcia maleje do takiej wartości, która równoważy siłę sprężystości, a klocek zaczyna poruszać się z prędkością pasa transmisyjnego (czyli spoczywa względem niego). Ten ruch powoduje dalszy wzrost napięcia

sprężyny, aż do momentu, gdy efektywna siła sprężystości  $kx$  będzie równa maksymalnej sile tarcia  $\mu_s mg \cos \alpha$ . Znajdzie to przy wychyleniu

$$x_s = \frac{\mu_s mg \cos \alpha}{k}. \quad (40)$$

Ponieważ prędkość klocka jest niezerowa i dodatnia, klocek nadal będzie się oddalał od ściany, ale jego prędkość spadnie poniżej prędkości  $v_0$ , a zatem znowu będzie obowiązywać równanie ruchu (33) (ale już nie (36)). Maksymalną odległość  $x_{\max}$  na jaką oddali się klocek wyznaczymy z efektywnej zasady zachowania energii

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{k(x_s - x_0)^2}{2} = \frac{k(x_{\max} - x_0)^2}{2}. \quad (41)$$

czyli

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k}v_0^2 + (x_s - x_0)^2} + x_0 \quad (42)$$

lub w jawnej postaci

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k}v_0^2 + \frac{m}{k}(\mu_s - \mu_k)^2 g^2 \cos^2 \alpha} + \frac{m\mu_k g \cos \alpha}{k} \quad (43)$$

Po osiągnięciu maksymalnej odległości klocek zacznie wracać w kierunku ściany; ponieważ zwroty prędkości klocka i pasa transmisyjnego są przeciwne, stale będzie obowiązywało równanie ruchu (33) – będzie to ruch harmoniczny z amplitudą  $x_{\max} - x_0$  względem położenia  $x_0$  z częstością  $\omega$ . Biorąc pod uwagę warunki początkowe, zależność  $x$  od czasu będzie następująca

$$x = (x_{\max} - x_0) \cos \omega (t - t_{\max}) + x_0, \quad (44)$$

gdzie  $t_{\max}$  odpowiada rozważanej chwili największego oddalenia klocka od ściany. Zgodna z powyższym równaniem zależność prędkości od czasu jest następująca

$$v = -(x_{\max} - x_0) \omega \sin \omega (t - t_{\max}) \quad (45)$$

Największe zbliżenie klocka do ściany odpowiada położeniu

$$x_{\min} = -x_{\max} + 2x_0, \quad (46)$$

czyli w jawnej postaci

$$x_{\min} = -\sqrt{\frac{m}{k}v_0^2 + \frac{m}{k}(\mu_s - \mu_k)^2 g^2 \cos^2 \alpha} + \frac{m\mu_k g \cos \alpha}{k}. \quad (47)$$

Po największym zbliżeniu klocek znowu zaczyna się oddalać od ściany. Sytuacja jest analogiczna, jak w pierwszym omawianym etapie ruchu; ruch jest harmoniczny aż do momentu, gdy  $v = v_0$ .

Odpowiednią odległość  $x_2$  można wyznaczyć na podstawie równań (44), (45), efektywnej zasady zachowania energii  $mv_0^2/2 + k(x_2 - x_0)^2/2 = k(x_{\max} - x_0)^2/2$ , lub po prostu z faktu, że jest ona symetryczna do  $x_s$  względem  $x_0$ . Jest ona równa

$$x_2 = -x_s + 2x_0. \quad (48)$$

Ta wielkość musi być mniejsza od  $x_0$ , gdyż tuż przed rozważanym położeniem klocek przyspiesza. Zauważmy, że w tym punkcie wartość siły sprężystości  $|kx_2| = |-\mu_s + 2\mu_k| mg \cos \alpha$  jest na

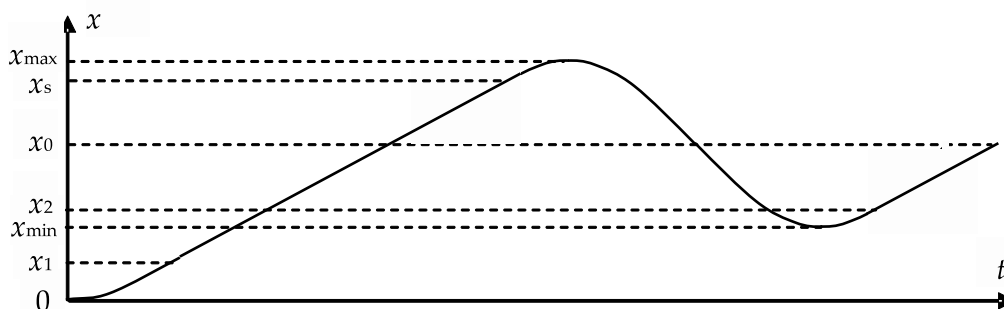
pewno mniejsza od maksymalnej siły tarcia  $\mu_s mg \cos \alpha$ , a więc na pewno klocek przestanie przyspieszać.

Od tego momentu ruch zaczyna być okresowy: klocek porusza się z prędkością  $v_0$  (przesuwając się razem z pasem transmisyjnym) aż do osiągnięcia odległości  $x_s$ , a potem znowu ruch jest harmoniczny, aż od osiągnięcia w trakcie oddalania od ściany położenia  $x = x_2$ .

Podsumowując

W przypadku  $\sqrt{\frac{m}{k}} \mu_k g \cos \alpha < v_0$  skrajne położenia klocka są dane wzorami (38), (39). Ruch jest zwykłym ruchem harmonicznym.

W przypadku  $\sqrt{\frac{m}{k}} \mu_k g \cos \alpha \geq v_0$  skrajne położenia klocka są dane wzorami (47), (43). Ruch jest częściowo ruchem harmonicznym, a częściowo jednostajnym, a okres tego ruchu jest dłuższy niż okres ruchu harmonicznego  $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . Przykładowy ruch w tym przypadku jest przedstawiony na rysunku poniżej. Zauważmy, że  $x_{\min}$  może być dodatnie - tak jak na rysunku, ale może też być ujemne.



Dla podanych wartości liczbowych otrzymujemy ze wzoru (37)  $v_{\max} = 1,07$  m/s. Zatem w przypadku a) mamy do czynienia z ruchem harmonicznym i otrzymujemy

$$x_{\min} = 0 \text{ m}, x_{\max} = 0,68 \text{ m}. \quad (49)$$

W przypadku b) zachodzi  $v_0 < v_{\max}$  i mamy do czynienia z ruchem częściowo harmonicznym, częściowo jednostajnym. Otrzymujemy

$$x_{\min} = 0,16 \text{ m}, x_{\max} = 0,52 \text{ m}. \quad (50)$$